Méthodes de Monte-Carlo et algorithmes stochastiques – TD/TP 3

Réduction de variance I : antithétiques, variables de contrôle et conditionnement

M2 Finance – Université Gustave Eiffel

Objectifs

Cette séance met en pratique trois mécanismes de réduction de variance vus en cours : couplage antithétique, variables de contrôle et conditionnement de Rao–Blackwell.

Exercice 1 – Variables antithétiques : un calcul exact de gain

On veut estimer

$$I = \int_0^1 x^4 \, dx.$$

On note $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et

$$Y = U^4, \qquad Y' = (1-U)^4, \qquad A = \frac{Y + Y'}{2}.$$

1) Calculer I, puis la variance $\mathrm{Var}(Y)$ d'une réplication naïve.

2) Montrer que A est sans biais pour I.

3) Calculer

$$\mathbb{E}\big[U^4(1-U)^4\big]$$

(par développement du polynôme, ou à l'aide d'une intégrale bêta si vous la connaissez), puis en déduire

$$\mathrm{Cov}(Y, Y').$$

Vérifier que cette covariance est négative.

4) En déduire $\mathrm{Var}(A)$ exactement.

5) On compare maintenant les deux méthodes à *coût comparable*. Avec m paires antithétiques, on utilise $2m$ évaluations de la fonction $x \mapsto x^4$. Comparer

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{I}_m^{\mathrm{anti}}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}\left(\widehat{I}_{2m}^{\mathrm{naive}}\right).$$

Donner le facteur de gain en variance et le facteur de gain sur la demi-largeur d'un intervalle de confiance.

6) Le gain vous paraît-il important ? Pourquoi est-il nettement moins spectaculaire que dans certains exemples très favorables ?

Idée à retenir

Une méthode antithétique doit être comparée à coût égal. La bonne question n'est donc pas seulement « la variance d'une paire est-elle plus petite ? », mais « que gagne-t-on avec le même nombre total d'évaluations ? ».

Exercice 2 – Variables de contrôle : payoff positif et deux contrôles gaussiens

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. On note φ la densité de la loi normale standard, Φ sa fonction de répartition et

$$\overline{\Phi}(a) = 1 - \Phi(a).$$

Pour $a \geq 0$, on veut estimer

$$I(a) = \mathbb{E}[(Z-a)_+].$$

On pose

$$H = (Z-a)_+.$$

1) Par intégrations par parties, établir les identités

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] &= \varphi(a),\\ \mathbb{E}[Z^2\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] &= a\varphi(a) + \overline{\Phi}(a),\\ \mathbb{E}[Z^3\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] &= (a^2+2)\varphi(a).\end{aligned}$$

2) En déduire

$$I(a) = \varphi(a) - a\overline{\Phi}(a),$$

puis calculer $\mathrm{Var}(H)$.

3) On utilise d'abord le contrôle

$$C_1 = Z, \qquad \mathbb{E}(C_1) = 0.$$

Calculer $\mathrm{Cov}(H, C_1)$ et en déduire le coefficient optimal $\beta_1^\star$.

4) On ajoute maintenant un second contrôle

$$C_2 = Z^2 - 1, \qquad \mathbb{E}(C_2) = 0.$$

Montrer que

$$\mathrm{Cov}(C_1, C_2) = 0, \qquad \mathrm{Var}(C_2) = 2, \qquad \mathrm{Cov}(H, C_2) = \varphi(a).$$

5) On considère

$$H_{\beta_1,\beta_2} = H - \beta_1 C_1 - \beta_2 C_2.$$

Déterminer les deux coefficients optimaux et la variance minimale obtenue.

6) Pour $a = 1$, donner une valeur numérique de la variance naïve et de la variance avec les deux contrôles. Quel est le facteur de réduction de variance ?

Idée à retenir

Avec plusieurs contrôles, on ne cherche plus une seule direction corrélée avec H, mais une projection sur l'espace engendré par plusieurs fluctuations d'espérance connue.

Exercice 3 – Rao–Blackwell sur un payoff de type call

Soient

$$X \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

indépendantes, avec $\sigma > 0$. Pour $K \in \mathbb{R}$, on veut estimer

$$I = \mathbb{E}[(X + \varepsilon - K)_+].$$

On pose

$$Y = (X + \varepsilon - K)_+.$$

1) Donner l'estimateur Monte-Carlo naïf de I basé sur des couples (X_i, ε_i) indépendants.
2) Fixons $X = x$. En écrivant $\varepsilon = \sigma Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, montrer que
$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \sigma\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma}\right) + (x-K)\Phi\left(\frac{x-K}{\sigma}\right).$$
3) En déduire un estimateur de Rao–Blackwell qui ne simule que X.
4) Montrer, à l'aide de la formule de variance totale, que cet estimateur a une variance inférieure ou égale à celle de l'estimateur naïf. Pourquoi l'inégalité est-elle stricte ici ?
5) Calculer I exactement en remarquant que
$$X + \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1+\sigma^2).$$
On exprimera la réponse avec $s = \sqrt{1+\sigma^2}$, φ et $\overline{\Phi}$.
6) Expliquer qualitativement dans quelle partie de l'algorithme le gain de variance est obtenu : quel aléa est encore simulé, et quel aléa a été intégré analytiquement ?

Exercice 4 – TP Python : gain statistique et coût de Rao–Blackwell

On reprend l'exercice précédent avec $\sigma = 1$. Les fonctions ci-dessous doivent renvoyer les *réplications individuelles* de l'estimateur naïf et de l'estimateur conditionné.

```
import time
import numpy as np
from scipy.stats import norm

rng = np.random.default_rng(123)


def naive_call_samples(n, K, sigma=1.0):
    # A compléter : simuler X et eps puis renvoyer
    # (X + eps - K)_+ pour chaque réplication.
    pass


def conditioned_call_samples(n, K, sigma=1.0):
    # A compléter : simuler seulement X et utiliser
    # E[(X + eps - K)_+ | X].
    pass


def exact_value(K, sigma=1.0):
    # A compléter à partir de la question 5 de l'exercice 3.
    pass


def summary(samples):
    n = len(samples)
    mean = np.mean(samples)
    var = np.var(samples, ddof=1)
    half_width = 1.96 * np.sqrt(var / n)
    return mean, var, half_width


n = 200_000
for K in [0.0, 1.0, 2.0, 3.0]:
    y = naive_call_samples(n, K)
    z = conditioned_call_samples(n, K)
    print("K =", K)
    print("exacte     ", exact_value(K))
```

```
    print("naif       ", summary(y))
    print("conditionne", summary(z))
    print("gain var   ", np.var(y, ddof=1) / np.var(z, ddof=1))
    print()
```

1) Compléter les trois fonctions.
2) Pour $K = 0, 1, 2, 3$, comparer les deux estimations à la valeur exacte. Comparer ensuite les variances empiriques et les demi-largeurs des intervalles de confiance.
3) Le facteur de réduction de variance est-il indépendant de K ? Comment l'interprétez-vous ?
4) Mesurer grossièrement le temps de calcul des deux méthodes avec `time.perf_counter`. Comparer alors, pour chaque méthode, le produit

   $$\text{variance d'une réplication} \times \text{temps moyen par réplication}.$$

   La méthode conditionnée reste-t-elle avantageuse une fois le coût pris en compte ?
5) Pourquoi cette dernière comparaison est-elle plus pertinente qu'une comparaison des variances seules ?

À programmer vous-même

Pour mesurer un temps de calcul très court, répétez plusieurs fois la même fonction puis divisez par le nombre total de réplications. Les temps exacts dépendent de la machine : ce qui compte est l'ordre de grandeur et le produit variance–coût.

Complément – Quand le surcoût d'une paire antithétique annule-t-il le gain ?

Soient Y et Y' de même variance σ^2 et de corrélation

$$\rho = \mathrm{Corr}(Y, Y').$$

Une réplication naïve coûte τ. Une paire antithétique coûte

$$\tau_{\text{pair}} = 2c\tau,$$

avec $c \geq 1$: le facteur c représente un éventuel surcoût du couplage.

1) Calculer la variance d'une paire moyennée $A = (Y + Y')/2$.
2) À budget de calcul fixé, comparer le critère variance–coût de la méthode naïve et de la méthode antithétique.
3) Montrer que l'antithétique est préférable si et seulement si

   $$\rho < \frac{1}{c} - 1.$$

4) Pour $c = 1.2$, quelle corrélation négative minimale faut-il obtenir ?