Correction – TD/TP 3

Réduction de variance I : antithétiques, variables de contrôle et conditionnement

M2 Finance – Université Gustave Eiffel

Exercice 1 – Variables antithétiques : un calcul exact de gain

On a

$$I = \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{1}{5}.$$

1) Pour $Y = U^4$,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{5}, \qquad \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(U^8) = \frac{1}{9}.$$

Donc

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{9} - \frac{1}{25} = \frac{16}{225}.$$

2) Comme $1 - U \overset{\mathcal{L}}{=} U$,

$$\mathbb{E}(A) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(U^4) + \mathbb{E}((1-U)^4)\right) = \frac{1}{5} = I.$$

3) On calcule

$$\mathbb{E}\big[U^4(1-U)^4\big] = \int_0^1 u^4(1-u)^4 \, du = \frac{1}{630}.$$

On peut obtenir ce résultat en développant $(1-u)^4$, ou en reconnaissant $B(5,5)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y, Y') &= \mathbb{E}\big[U^4(1-U)^4\big] - \mathbb{E}(U^4)^2 \\ &= \frac{1}{630} - \frac{1}{25} = -\frac{121}{3150} < 0.\end{aligned}$$

4) Comme Y et Y' ont même variance,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Var}(Y) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Cov}(Y, Y') \\ &= \frac{1}{2}\frac{16}{225} + \frac{1}{2}\left(-\frac{121}{3150}\right) \\ &= \frac{103}{6300} \simeq 0.01635.\end{aligned}$$

5) Avec m paires,

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{I}_m^{\mathrm{anti}}\right) = \frac{1}{m}\frac{103}{6300}.$$

Avec le même nombre total de $2m$ évaluations,

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{I}_{2m}^{\mathrm{naive}}\right) = \frac{1}{2m}\frac{16}{225}.$$

Le facteur de gain en variance vaut donc

$$\frac{\mathrm{Var}(\widehat{I}_{2m}^{\mathrm{naive}})}{\mathrm{Var}(\widehat{I}_m^{\mathrm{anti}})} = \frac{16/225}{2(103/6300)} = \frac{224}{103} \simeq 2.17.$$

La demi-largeur d'IC est donc divisée par

$$\sqrt{\frac{224}{103}} \simeq 1.47.$$

6) Le gain est réel mais modéré. La covariance est bien négative, mais elle n'est pas proche de $-\mathrm{Var}(Y)$. Autrement dit, les deux termes se compensent partiellement, pas presque parfaitement.

Exercice 2 – Variables de contrôle : payoff positif et deux contrôles gaussiens

On utilise l'identité

$$\varphi'(z) = -z\varphi(z).$$

1) On a

$$\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] = \int_a^\infty z\varphi(z)\,dz = \varphi(a).$$

Pour le moment d'ordre 2,

$$\begin{aligned}\int_a^\infty z^2\varphi(z)\,dz &= [-z\varphi(z)]_a^\infty + \int_a^\infty \varphi(z)\,dz \\ &= a\varphi(a) + \overline{\Phi}(a).\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\int_a^\infty z^3\varphi(z)\,dz &= \Big[-z^2\varphi(z)\Big]_a^\infty + 2\int_a^\infty z\varphi(z)\,dz \\ &= (a^2+2)\varphi(a).\end{aligned}$$

2) Comme $H = (Z-a)\mathbf{1}_{\{Z>a\}}$,

$$\begin{aligned}I(a) &= \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] - a\mathbb{P}(Z>a) \\ &= \varphi(a) - a\overline{\Phi}(a).\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H^2) &= \mathbb{E}\left[(Z-a)^2\mathbf{1}_{\{Z>a\}}\right] \\ &= \mathbb{E}[Z^2\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] - 2a\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] + a^2\overline{\Phi}(a) \\ &= (1+a^2)\overline{\Phi}(a) - a\varphi(a).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Var}(H) = (1+a^2)\overline{\Phi}(a) - a\varphi(a) - \Big(\varphi(a) - a\overline{\Phi}(a)\Big)^2.$$

3) Comme $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $\mathrm{Var}(Z) = 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(H,Z) &= \mathbb{E}\left[Z(Z-a)\mathbf{1}_{\{Z>a\}}\right] \\ &= \mathbb{E}[Z^2\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] - a\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] \\ &= \overline{\Phi}(a).\end{aligned}$$

Donc

$$\beta_1^\star = \overline{\Phi}(a).$$

4) Pour $C_2 = Z^2 - 1$,

$$\mathrm{Cov}(C_1, C_2) = \mathbb{E}(Z^3 - Z) = 0$$

par symétrie, et

$$\mathrm{Var}(C_2) = \mathbb{E}(Z^4) - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(H, C_2) &= \mathbb{E}\left[(Z-a)(Z^2-1)\mathbf{1}_{\{Z>a\}}\right] \\ &= \mathbb{E}[Z^3\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] - \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] \\ &\quad - a\mathbb{E}[Z^2\mathbf{1}_{\{Z>a\}}] + a\overline{\Phi}(a) \\ &= \varphi(a).\end{aligned}$$

5) La matrice de covariance des contrôles est diagonale :

$$\Sigma_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}(a) \\ \varphi(a) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\beta^\star = \Sigma_C^{-1} c = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}(a) \\ \varphi(a)/2 \end{pmatrix}.$$

La variance minimale vaut

$$\mathrm{Var}(H) - \overline{\Phi}(a)^2 - \frac{\varphi(a)^2}{2}.$$

6) Pour $a = 1$,

$$\varphi(1) \simeq 0.24197, \qquad \overline{\Phi}(1) \simeq 0.15866.$$

On obtient

$$\mathrm{Var}(H) \simeq 0.06840, \qquad \mathrm{Var}(H_{\beta_1^\star, \beta_2^\star}) \simeq 0.01395.$$

Le facteur de réduction de variance est donc environ

$$\frac{0.06840}{0.01395} \simeq 4.90.$$

Exercice 3 – Rao–Blackwell sur un payoff de type call

1) L'estimateur naïf est

$$\widehat{I}_n^{\mathrm{naive}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i + \varepsilon_i - K)_+.$$

2) Conditionnellement à $X = x$, on écrit $\varepsilon = \sigma Z$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y \mid X = x) &= \mathbb{E}[(x - K + \sigma Z)_+] \\ &= \int_{(K-x)/\sigma}^{\infty} (x - K + \sigma z)\varphi(z)\, dz.\end{aligned}$$

En posant

$$d = \frac{x-K}{\sigma},$$

on obtient

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = (x-K)\Phi(d) + \sigma\varphi(d).$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \sigma\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma}\right) + (x-K)\Phi\left(\frac{x-K}{\sigma}\right).}$$

3) Si l'on pose

$$g(x) = \sigma\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma}\right) + (x-K)\Phi\left(\frac{x-K}{\sigma}\right),$$

alors

$$\widehat{I}_n^{\mathrm{RB}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

est sans biais par la propriété de tour.

4) La formule de variance totale donne

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}(Y \mid X)\right) + \mathbb{E}\big[\,\mathrm{Var}(Y \mid X)\big].$$

Ainsi

$$\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}(Y \mid X)\right) \leq \mathrm{Var}(Y).$$

L'inégalité est stricte puisque $\sigma > 0$: pour un ensemble de valeurs de X de probabilité positive, le payoff garde une variabilité non nulle lorsque l'on fait varier ε.

5) Posons

$$s = \sqrt{1+\sigma^2}.$$

Comme $X + \varepsilon \overset{\mathcal{L}}{=} sZ$,

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}[(sZ-K)_+] \\ &= s\,\varphi\left(\frac{K}{s}\right) - K\,\overline{\Phi}\left(\frac{K}{s}\right). \end{aligned}$$

6) L'estimateur naïf simule les deux sources d'aléa X et ε. Le Rao–Blackwell conserve la simulation de X, mais intègre analytiquement le bruit ε. Le terme de variance retiré est précisément

$$\mathbb{E}\big[\,\mathrm{Var}(Y \mid X)\big].$$

Exercice 4 – TP Python : gain statistique et coût de Rao–Blackwell

Une solution possible est :

```
import time
import numpy as np
from scipy.stats import norm

rng = np.random.default_rng(123)


def naive_call_samples(n, K, sigma=1.0):
    x = rng.normal(size=n)
    eps = rng.normal(scale=sigma, size=n)
    return np.maximum(x + eps - K, 0.0)


def conditioned_call_samples(n, K, sigma=1.0):
    x = rng.normal(size=n)
    d = (x - K) / sigma
    return sigma * norm.pdf(d) + (x - K) * norm.cdf(d)


def exact_value(K, sigma=1.0):
    s = np.sqrt(1.0 + sigma**2)
    k = K / s
    return s * norm.pdf(k) - K * norm.sf(k)
```

```
def summary(samples):
    n = len(samples)
    mean = np.mean(samples)
    var = np.var(samples, ddof=1)
    half_width = 1.96 * np.sqrt(var / n)
    return mean, var, half_width


n = 200_000
for K in [0.0, 1.0, 2.0, 3.0]:
    y = naive_call_samples(n, K)
    z = conditioned_call_samples(n, K)
    print("K =", K)
    print("exacte     ", exact_value(K))
    print("naif       ", summary(y))
    print("conditionne", summary(z))
    print("gain var   ", np.var(y, ddof=1) / np.var(z, ddof=1))
    print()
```

Les deux moyennes doivent être compatibles avec la valeur exacte à l'intérieur de l'erreur Monte-Carlo. La variance de la version conditionnée doit être plus petite, mais le facteur de gain dépend de K : la quantité de bruit retirée par le conditionnement dépend du régime du payoff.

Pour mesurer le temps, on peut par exemple utiliser :

```
def time_per_sample(fun, n, K, n_repeat=10):
    t0 = time.perf_counter()
    for _ in range(n_repeat):
        fun(n, K)
    elapsed = time.perf_counter() - t0
    return elapsed / (n_repeat * n)

K = 1.0
n = 500_000

y = naive_call_samples(n, K)
z = conditioned_call_samples(n, K)

cost_naive = time_per_sample(naive_call_samples, n, K)
cost_cond = time_per_sample(conditioned_call_samples, n, K)

crit_naive = np.var(y, ddof=1) * cost_naive
crit_cond = np.var(z, ddof=1) * cost_cond

print("cout naif", cost_naive)
print("cout conditionne", cost_cond)
print("variance x cout naif", crit_naive)
print("variance x cout conditionne", crit_cond)
```

Les valeurs numériques dépendent fortement de la machine et de l'implémentation de Φ et φ. La conclusion doit donc être fondée sur le produit variance–coût mesuré, et pas uniquement sur la variance. Le conditionnement diminue toujours la variance par réplication, mais une évaluation plus coûteuse de la fonction conditionnelle peut réduire une partie du gain en temps de calcul.

Complément – Quand le surcoût d'une paire antithétique annule-t-il le gain ?

1) Comme $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(Y') = \sigma^2$ et $\mathrm{Cov}(Y, Y') = \rho\sigma^2$,

$$\mathrm{Var}(A) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(Y + Y') = \frac{\sigma^2}{2}(1 + \rho).$$

2) Pour la méthode naïve, le critère variance–coût est

$$\sigma^2\tau.$$

Pour une paire antithétique,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A)\tau_{\text{pair}} &= \frac{\sigma^2}{2}(1+\rho)\,2c\tau \\ &= \sigma^2 c\tau(1+\rho).\end{aligned}$$

3) La méthode antithétique est préférable si

$$\sigma^2 c\tau(1+\rho) < \sigma^2\tau,$$

c'est-à-dire

$$c(1+\rho) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho < \frac{1}{c} - 1.$$

4) Pour $c = 1.2$,

$$\frac{1}{c} - 1 = \frac{1}{1.2} - 1 = -\frac{1}{6} \simeq -0.167.$$

Il faut donc obtenir une corrélation inférieure à environ -0.17 pour compenser le surcoût de 20%.