Université Gustave Eiffel — Intégration-Probabilité
L3 Math

Partiel 1 - 2024-25
Durée : 1h30

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{E}) \to (E, \mathcal{E})$ une application. Soit

$$\mathcal{A} := \big\{ A \in \mathcal{E} \,\big|\, f^{-1}(A) = A \big\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur E.
2. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f(x) := |x|, x \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{A} = \big\{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,\big|\, A = -A \big\}.$$

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{E}, m)$ un espace mesuré. Soit $h : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application m-intégrable. Soit $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\mu(A) := \int_E h(x)\, \mathbb{1}_A(x)\, dm(x) = \int_A h\, dm, \qquad A \in \mathcal{E}.$$

1. Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.
2. Montrer que si $f : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une fonction étagée, alors $\displaystyle\int f\, d\mu = \int_E f\, h\, dm.$
3. En déduire que pour toute fonction f positive mesurable, $\displaystyle\int f\, d\mu = \int_E f\, h\, dm.$

Exercice 3.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f_n(t) := \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}\, t^{3/2}}, \quad t \in [0,1].$$
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$g_n(t) := \cos(nt) e^{-nt}, \quad t \in [0, +\infty[.$$
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt$.

Exercice 4. Soit $g :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction definie par

$$g(x,t) := \frac{\sin(xt)}{xt(1+t)}, \qquad x, t \in]0, +\infty[.$$

1. Justifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(x,t)|\, dt < \infty$.
On note alors $f(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\, dt$, $x \in]0, +\infty[$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier proprement l'inégalité suivante : pour tout $x \geq \varepsilon$ et tout $t > 0$,
$$|g(x,t)| \leq \mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \frac{1}{\varepsilon t^2} \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t).$$
3. Déduire des questions précédentes la continuité de la fonction f sur $]0, +\infty[$.