Université Gustave Eiffel — Intégration-Probabilité
L3 Math-Ens-Ing-LAS

**Partiel 1 - 2025-26**
Durée : 2h

**Exercice 1.** Soit $X$ un ensemble non vide. Soit $\mathcal{C}$ la classe de parties de $X$ dénombrables ou de complémentaires dénombrables. Soit $\mathcal{T} = \sigma\big(\{x\} : x \in X\big)$ ($\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par les singletons de $X$).

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{C}$.

**Exercice 2.**

1. Soit $f_n(t) := \dfrac{nt}{1+ne^t}$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$.
2. Soit $g_n(t) := (1+\cos^2(t))^n$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} g_n(t)\,dt$.

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

1. On munit $[2, +\infty[$ de la mesure de Lebesgue $\lambda$ (restreinte à $[2, +\infty[$). Pour quels $p \in [1, +\infty[$ a t-on $f \in L^p([2, +\infty[, \lambda)$ ?
2. On munit $\mathbb{R}_+^*$ de la mesure de $m$ de densité $e^{-x}$ par rapport à $\lambda$, $dm(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)dx$. Pour quels $p \in [1, +\infty[$ a t-on $f \in L^p(]0, +\infty[, m)$ ?

**Exercice 4.**

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{|t|}\,dt \geq \sum_{k=1}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi}\,dt$.

   En déduire que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{|t|}\,dt = +\infty$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \frac{|\sin(t)|}{n\left|\log\left(1-\frac{t}{n}\right)\right|}\,dt$.
3. Pour $u \in [0, 1[$, comparer $|\log(1-u)|$ et $u$, puis déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin^2(t)}{n^2\left(\log\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)^2}\,dt.$$

   (on ne demande pas de calcul explicite de la limite).

**Exercice 5.** Pour $x$ dans $\mathbb{R}$, on pose $F(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

1. Vérifier que $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et que c'est une fonction continue.
2. Montrer que $F$ est dérivable, et donner une expression (intégrale) de $F'$.
3. Montrer que pour tout réel $x$, $F'(x) = -\dfrac{1}{2}xF(x)$. En déduire une expression simple de $F$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).