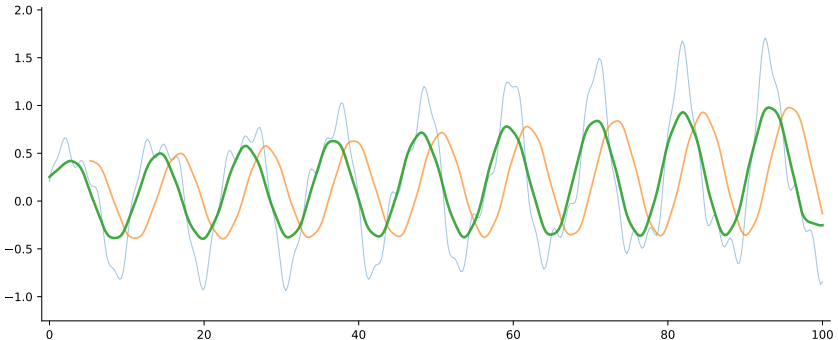
# Séries temporelles

Cours 3 – Filtres linéaires, convolution et bruit blanc filtré




M1 Actuariat – Université Gustave Eiffel

Solesne Bourguin – 2026–2027

# Fil conducteur de la séance

Au cours précédent, on a commencé une nouvelle partie : les filtres. Aujourd'hui, on en fait un vrai outil de calcul et d'interprétation.

# Fil conducteur de la séance

Au cours précédent, on a commencé une nouvelle partie : les filtres. Aujourd'hui, on en fait un vrai outil de calcul et d'interprétation.

1. Reprendre clairement les filtres finis : coefficients, causalité, moyennes mobiles, différences.
2. Comprendre ce que les filtres font aux tendances et aux saisonnalités.
3. Composer deux filtres : convolution et calculs avec l'opérateur $B$.
4. Voir comment un filtre peut créer de la dépendance à partir d'un bruit blanc.
5. Introduire les filtres infinis avec l'exemple des poids géométriques.

# Fil conducteur de la séance

Au cours précédent, on a commencé une nouvelle partie : les filtres. Aujourd'hui, on en fait un vrai outil de calcul et d'interprétation.

1. Reprendre clairement les filtres finis : coefficients, causalité, moyennes mobiles, différences.
2. Comprendre ce que les filtres font aux tendances et aux saisonnalités.
3. Composer deux filtres : convolution et calculs avec l'opérateur $B$.
4. Voir comment un filtre peut créer de la dépendance à partir d'un bruit blanc.
5. Introduire les filtres infinis avec l'exemple des poids géométriques.

Objectif de la séance : passer de transformations appliquées à une série à des opérations que l'on sait écrire, composer et interpréter.

# Rappel 1/3 : pourquoi introduire les filtres ?

Dans les deux premières séances, on a surtout utilisé des transformations pour **mieux lire** une série : zoom, changement d'échelle, différences, gestion du calendrier.

**Transformation descriptive**

- On applique une opération.
- On regarde si le graphique est plus lisible.
- L'effet est souvent interprété après coup.

**Filtre linéaire**

- On écrit une combinaison de valeurs voisines.
- On connaît les coefficients.
- On peut prévoir, composer et interpréter l'effet.

Un filtre sert à passer de « j'applique une transformation » à « je sais exactement ce que cette transformation conserve, atténue ou annule ».

# Rappel 2/3 : définition et exemples de base

On note $B$ l'opérateur de retard :

$$BX_t = X_{t-1}, \qquad B^2X_t = X_{t-2}, \qquad B^{-1}X_t = X_{t+1}.$$

Un filtre fini remplace $X_t$ par une combinaison linéaire d'un nombre fini de valeurs voisines :

$$(a(B)X)_t = \sum_j a_j X_{t-j}.$$

| **Opération** | **Filtre** | **Effet au temps $t$** |
|---|---|---|
| Différence | $1 - B$ | $X_t - X_{t-1}$ |
| Différence saisonnière | $1 - B^s$ | $X_t - X_{t-s}$ |
| Moyenne mobile passée | $\frac{1}{3}(1 + B + B^2)$ | $\frac{1}{3}(X_t + X_{t-1} + X_{t-2})$ |
| Moyenne mobile centrée | $\frac{1}{3}(B^{-1} + 1 + B)$ | $\frac{1}{3}(X_{t+1} + X_t + X_{t-1})$ |

Un filtre causal n'utilise que le présent et le passé : il n'a pas de terme $B^{-1}, B^{-2}, \ldots$.

# Rappel 3/3 : lire l'effet d'un filtre

La somme des coefficients dit ce qui arrive à un niveau constant.

$$X_t = c \quad \Longrightarrow \quad (a(B)X)_t = c \sum_j a_j.$$

**Moyenne**

$$\frac{1}{3}(1 + B + B^2)$$

Somme $= 1$ : une constante reste une constante.

**Différence**

$$1 - B$$

Somme $= 0$ : si $X_t = c$, alors $X_t - X_{t-1} = c - c = 0$.

**Différence saisonnière**

$$1 - B^s$$

Si $s_t = s_{t-s}$, alors $s_t - s_{t-s} = 0$.

Les différences sont elles-mêmes des filtres. Elles apparaissent ici parce qu'elles sont des exemples centraux de filtres qui suppriment un niveau, une tendance simple ou une saisonnalité périodique.

# Composition de filtres et convolution

On apprend à remplacer deux filtres successifs par un seul filtre équivalent.

# Pourquoi composer des filtres ?

En pratique, on peut appliquer plusieurs opérations à une même série.

# Pourquoi composer des filtres ?

En pratique, on peut appliquer plusieurs opérations à une même série.

| **Étape 1** | **Étape 2** | **Question** |
|---|---|---|
| lisser | différencier | quel filtre global obtient-on ? |
| différencier | lisser | obtient-on la même chose ? |
| enlever une saisonnalité | lisser le bruit | quels coefficients au final ? |

# Pourquoi composer des filtres ?

En pratique, on peut appliquer plusieurs opérations à une même série.

| **Étape 1** | **Étape 2** | **Question** |
|---|---|---|
| lisser | différencier | quel filtre global obtient-on ? |
| différencier | lisser | obtient-on la même chose ? |
| enlever une saisonnalité | lisser le bruit | quels coefficients au final ? |

La composition permet de simplifier une chaîne de transformations et de comprendre ce qu'elle fait réellement.

# Calculer avec l'opérateur $B$

Si deux filtres sont des polynômes en $B$, on les compose comme des polynômes usuels.

# Calculer avec l'opérateur $B$

Si deux filtres sont des polynômes en $B$, on les compose comme des polynômes usuels.

$$\left(\sum_j a_j B^j\right)\left(\sum_k b_k B^k\right) = \sum_\ell c_\ell B^\ell, \qquad c_\ell = \sum_j a_j b_{\ell-j}.$$

# Calculer avec l'opérateur $B$

Si deux filtres sont des polynômes en $B$, on les compose comme des polynômes usuels.

$$\left(\sum_j a_j B^j\right)\left(\sum_k b_k B^k\right) = \sum_\ell c_\ell B^\ell, \qquad c_\ell = \sum_j a_j b_{\ell-j}.$$

La formule $c_\ell = \sum_j a_j b_{\ell-j}$ est la convolution discrète des coefficients.

# Calculer avec l'opérateur $B$

Si deux filtres sont des polynômes en $B$, on les compose comme des polynômes usuels.

$$\left(\sum_j a_j B^j\right)\left(\sum_k b_k B^k\right) = \sum_\ell c_\ell B^\ell, \qquad c_\ell = \sum_j a_j b_{\ell-j}.$$

La formule $c_\ell = \sum_j a_j b_{\ell-j}$ est la convolution discrète des coefficients.

Les coefficients du filtre composé disent quels retards survivent après les deux opérations.

# Exemple : moyenne sur 2 puis différence

On pose

$$M_2(B) = \frac{1}{2}(1 + B), \qquad \Delta(B) = 1 - B.$$

# Exemple : moyenne sur 2 puis différence

On pose

$$M_2(B) = \frac{1}{2}(1 + B), \qquad \Delta(B) = 1 - B.$$

$$M_2(B)\Delta(B) = \frac{1}{2}(1 + B)(1 - B) = \frac{1}{2}(1 - B^2).$$

# Exemple : moyenne sur 2 puis différence

On pose

$$M_2(B) = \frac{1}{2}(1 + B), \qquad \Delta(B) = 1 - B.$$

$$M_2(B)\Delta(B) = \frac{1}{2}(1 + B)(1 - B) = \frac{1}{2}(1 - B^2).$$

Donc

$$M_2(B)\Delta(B)X_t = \frac{1}{2}(X_t - X_{t-2}).$$

# Exemple : moyenne sur 2 puis différence

On pose

$$M_2(B) = \frac{1}{2}(1 + B), \qquad \Delta(B) = 1 - B.$$

$$M_2(B)\Delta(B) = \frac{1}{2}(1 + B)(1 - B) = \frac{1}{2}(1 - B^2).$$

Donc

$$M_2(B)\Delta(B)X_t = \frac{1}{2}(X_t - X_{t-2}).$$

Le terme en $X_{t-1}$ disparaît : la moyenne des variations successives télescope.

# Pourquoi le terme intermédiaire disparaît ?

Écrivons les deux étapes à la main.

# Pourquoi le terme intermédiaire disparaît ?

Écrivons les deux étapes à la main.

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1},$$
$$\Delta X_{t-1} = X_{t-1} - X_{t-2}.$$

# Pourquoi le terme intermédiaire disparaît ?

Écrivons les deux étapes à la main.

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1},$$
$$\Delta X_{t-1} = X_{t-1} - X_{t-2}.$$

La moyenne passée de ces deux variations vaut

$$\frac{1}{2}\big(\Delta X_t + \Delta X_{t-1}\big) = \frac{1}{2}\big(X_t - X_{t-1} + X_{t-1} - X_{t-2}\big).$$

# Pourquoi le terme intermédiaire disparaît ?

Écrivons les deux étapes à la main.

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1},$$
$$\Delta X_{t-1} = X_{t-1} - X_{t-2}.$$

La moyenne passée de ces deux variations vaut

$$\frac{1}{2}\big(\Delta X_t + \Delta X_{t-1}\big) = \frac{1}{2}\big(X_t - X_{t-1} + X_{t-1} - X_{t-2}\big).$$

Les deux termes $-X_{t-1}$ et $+X_{t-1}$ se compensent. Il reste $\frac{1}{2}(X_t - X_{t-2})$.

# Même calcul avec une moyenne sur 3

Pour

$$M_3(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2),$$

on obtient

# Même calcul avec une moyenne sur 3

Pour

$$M_3(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2),$$

on obtient

$$M_3(B)\Delta(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2)(1 - B) = \frac{1}{3}(1 - B^3).$$

# Même calcul avec une moyenne sur 3

Pour

$$M_3(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2),$$

on obtient

$$M_3(B)\Delta(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2)(1 - B) = \frac{1}{3}(1 - B^3).$$

Donc

$$M_3(B)\Delta(B)X_t = \frac{1}{3}(X_t - X_{t-3}).$$

# Même calcul avec une moyenne sur 3

Pour

$$M_3(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2),$$

on obtient

$$M_3(B)\Delta(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2)(1 - B) = \frac{1}{3}(1 - B^3).$$

Donc

$$M_3(B)\Delta(B)X_t = \frac{1}{3}(X_t - X_{t-3}).$$

À nouveau, les variations intermédiaires se compensent. Le filtre final compare la valeur actuelle à celle trois dates plus tôt.

# Les filtres commutent-ils ?

Ici, les filtres sont des polynômes en un même opérateur $B$.

# Les filtres commutent-ils ?

Ici, les filtres sont des polynômes en un même opérateur $B$.

$$M_2(B)\Delta(B) = \Delta(B)M_2(B).$$

# Les filtres commutent-ils ?

Ici, les filtres sont des polynômes en un même opérateur $B$.

$$M_2(B)\Delta(B) = \Delta(B)M_2(B).$$

C'est attendu : les polynômes en une même variable commutent.

# Les filtres commutent-ils ?

Ici, les filtres sont des polynômes en un même opérateur $B$.

$$M_2(B)\Delta(B) = \Delta(B)M_2(B).$$

C'est attendu : les polynômes en une même variable commutent.

Pour ces filtres linéaires finis, lisser puis différencier donne le même filtre algébrique que différencier puis lisser. L'interprétation pratique des bords de série peut toutefois changer dans $\mathbb{R}$.

# Bruit blanc filtré

Un filtre peut transformer une suite sans mémoire en une série dépendante dans le temps.

# Rappel : un bruit blanc

Un bruit blanc centré est une suite $(Z_t)$ telle que

$$\mathbb{E}(Z_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}(Z_t) = \sigma^2, \qquad \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) = 0 \text{ si } h \neq 0.$$

# Rappel : un bruit blanc

Un bruit blanc centré est une suite $(Z_t)$ telle que

$$\mathbb{E}(Z_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}(Z_t) = \sigma^2, \qquad \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) = 0 \text{ si } h \neq 0.$$

Il n'y a pas de corrélation temporelle : connaître $Z_t$ ne donne pas d'information linéaire sur $Z_{t+1}$.

# Rappel : un bruit blanc

Un bruit blanc centré est une suite $(Z_t)$ telle que

$$\mathbb{E}(Z_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}(Z_t) = \sigma^2, \qquad \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) = 0 \text{ si } h \neq 0.$$

Il n'y a pas de corrélation temporelle : connaître $Z_t$ ne donne pas d'information linéaire sur $Z_{t+1}$.

Mais si on mélange les chocs avec un filtre, deux observations successives de la série filtrée peuvent partager un même choc.

# Autocovariance et autocorrélation

Pour mesurer une dépendance linéaire dans le temps, on compare la série avec elle-même décalée.

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}), \qquad \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

- $\gamma(h)$ mesure la covariance entre deux dates séparées de $h$ pas.
- $\rho(h)$ est la même information normalisée entre $-1$ et $1$.
- Pour un bruit blanc, $\rho(h) = 0$ dès que $h \neq 0$.

L'autocorrélation sert à repérer si une série garde une mémoire linéaire de ses valeurs passées.

# ACF : ce que trace le graphique

L'ACF, pour *auto-correlation function*, est le graphique des autocorrélations en fonction du retard.

| **Retard** | **On compare** | **Valeur tracée** |
|---|---|---|
| $h = 1$ | $X_t$ avec $X_{t+1}$ | $\rho(1)$ |
| $h = 2$ | $X_t$ avec $X_{t+2}$ | $\rho(2)$ |
| $h = 12$ | $X_t$ avec $X_{t+12}$ | $\rho(12)$ |

Dans `R`, `acf(x)` remplace les covariances théoriques inconnues par des covariances empiriques calculées sur la série observée.

Une ACF proche de 0 à tous les retards suggère peu de dépendance linéaire ; des pics indiquent des retards importants.

# Le filtre $1 + \theta B$

On part d'un bruit blanc $(Z_t)$ et on définit

$$Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

# Le filtre $1 + \theta B$

On part d'un bruit blanc $(Z_t)$ et on définit

$$Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

| Date | Valeur filtrée | Chocs utilisés |
|---|---|---|
| $t$ | $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ | $Z_t, Z_{t-1}$ |
| $t+1$ | $Y_{t+1} = Z_{t+1} + \theta Z_t$ | $Z_{t+1}, Z_t$ |

# Le filtre $1 + \theta B$

On part d'un bruit blanc $(Z_t)$ et on définit

$$Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

| Date | Valeur filtrée | Chocs utilisés |
|---|---|---|
| $t$ | $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ | $Z_t, Z_{t-1}$ |
| $t+1$ | $Y_{t+1} = Z_{t+1} + \theta Z_t$ | $Z_{t+1}, Z_t$ |

$Y_t$ et $Y_{t+1}$ ont un choc commun : $Z_t$. C'est ce partage qui crée une covariance au retard 1.

# Calcul de la moyenne et de la variance

Si $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, alors

# Calcul de la moyenne et de la variance

Si $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, alors

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Z_t) + \theta \mathbb{E}(Z_{t-1}) = 0.$$

# Calcul de la moyenne et de la variance

Si $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, alors

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Z_t) + \theta \mathbb{E}(Z_{t-1}) = 0.$$

Comme deux chocs distincts d'un bruit blanc sont non corrélés,

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(Z_t) + \theta^2 \mathrm{Var}(Z_{t-1}) = (1 + \theta^2)\sigma^2.$$

# Calcul de la moyenne et de la variance

Si $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, alors

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Z_t) + \theta \mathbb{E}(Z_{t-1}) = 0.$$

Comme deux chocs distincts d'un bruit blanc sont non corrélés,

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(Z_t) + \theta^2 \,\mathrm{Var}(Z_{t-1}) = (1 + \theta^2)\sigma^2.$$

La variance augmente parce que $Y_t$ additionne deux sources de fluctuation : le choc présent et une partie du choc précédent.

# Calcul de la covariance au retard 1

On calcule

$$\gamma_Y(1) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}).$$

# Calcul de la covariance au retard 1

On calcule

$$\gamma_Y(1) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}) &= \mathrm{Cov}(Z_t + \theta Z_{t-1},\, Z_{t+1} + \theta Z_t) \\ &= \theta\, \mathrm{Var}(Z_t) \\ &= \theta\sigma^2.\end{aligned}$$

# Calcul de la covariance au retard 1

On calcule

$$\gamma_Y(1) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}) &= \mathrm{Cov}(Z_t + \theta Z_{t-1},\, Z_{t+1} + \theta Z_t) \\ &= \theta\, \mathrm{Var}(Z_t) \\ &= \theta\sigma^2.\end{aligned}$$

Tous les autres termes de covariance sont nuls, sauf celui où $Z_t$ est comparé à lui-même.

# Calcul de la covariance au retard 1

On calcule

$$\gamma_Y(1) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}) &= \mathrm{Cov}(Z_t + \theta Z_{t-1},\, Z_{t+1} + \theta Z_t) \\ &= \theta\, \mathrm{Var}(Z_t) \\ &= \theta\sigma^2.\end{aligned}$$

Tous les autres termes de covariance sont nuls, sauf celui où $Z_t$ est comparé à lui-même.

Pour $|h| \geq 2$, il n'y a plus de choc commun : $\gamma_Y(h) = 0$.

# Signature en autocorrélation

On obtient

$$\rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \qquad \rho_Y(h) = 0 \quad \text{si } |h| > 1.$$

# Signature en autocorrélation

On obtient

$$\rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \qquad \rho_Y(h) = 0 \quad \text{si } |h| > 1.$$

Pour $\theta = 0.8$,

$$\rho_Y(1) = \frac{0.8}{1+0.8^2} \simeq 0.488.$$

# Signature en autocorrélation

On obtient

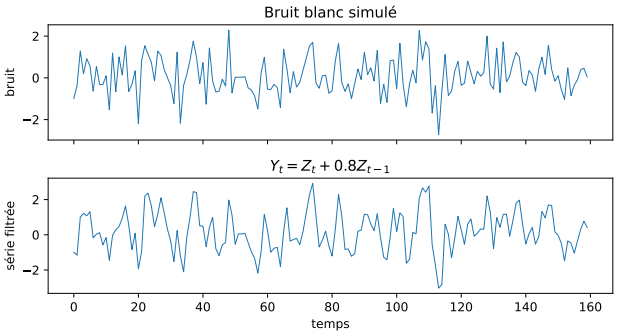
$$\rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \qquad \rho_Y(h) = 0 \quad \text{si } |h| > 1.$$

Pour $\theta = 0.8$,

$$\rho_Y(1) = \frac{0.8}{1+0.8^2} \simeq 0.488.$$

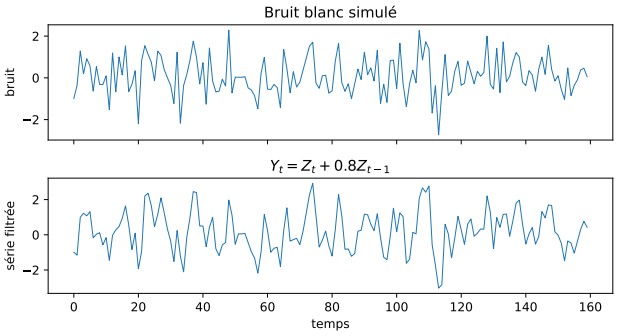
Le filtre $1 + \theta B$ crée une dépendance courte : visible au retard 1, absente ensuite.

# Bruit blanc et bruit blanc filtré




Le bruit blanc initial ne présente pas de dépendance temporelle structurée.

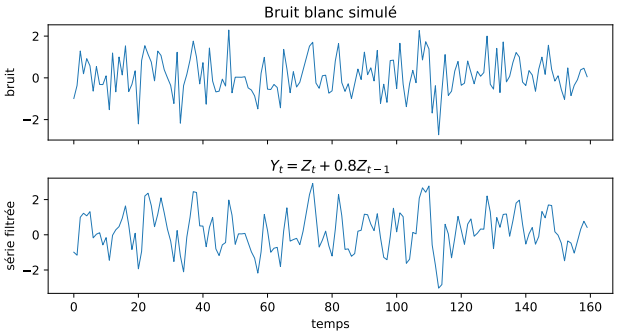
# Bruit blanc et bruit blanc filtré




Le bruit blanc initial ne présente pas de dépendance temporelle structurée.

Après filtrage, les observations successives partagent des chocs communs.

# Bruit blanc et bruit blanc filtré

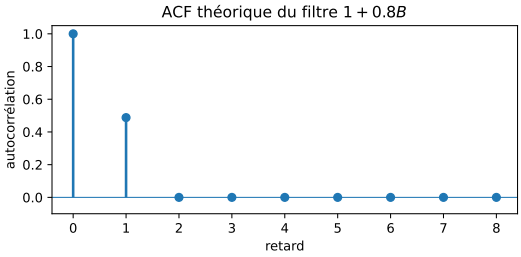



Le bruit blanc initial ne présente pas de dépendance temporelle structurée.

Après filtrage, les observations successives partagent des chocs communs.

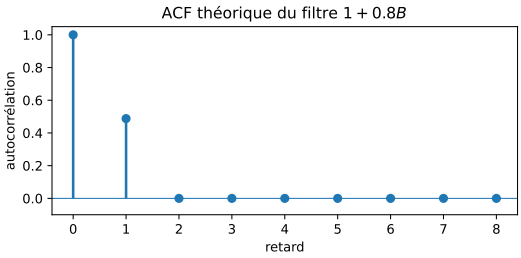
Ce mécanisme est le prototype des modèles à moyenne mobile.

# ACF théorique du bruit blanc filtré




La formule prédit une seule autocorrélation non nulle, au retard 1.

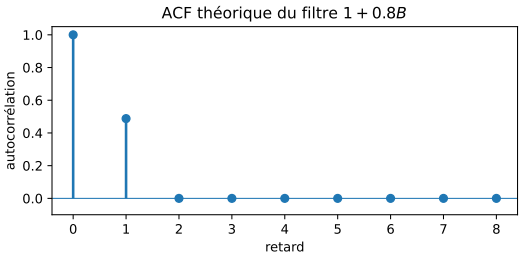
# ACF théorique du bruit blanc filtré




La formule prédit une seule autocorrélation non nulle, au retard 1.

Sur une simulation, l'ACF empirique ne sera jamais parfaitement égale à la théorie, mais elle doit avoir la même allure générale.

# ACF théorique du bruit blanc filtré




La formule prédit une seule autocorrélation non nulle, au retard 1.

Sur une simulation, l'ACF empirique ne sera jamais parfaitement égale à la théorie, mais elle doit avoir la même allure générale.

On commence à lire une ACF comme une signature de modèle.

# Simulation dans R

On peut vérifier qualitativement les calculs précédents.

```
set.seed(123)
z <- ts(rnorm(160), start = c(2000, 1), frequency = 12)
y <- z + 0.8*c(NA, z[-length(z)])

acf(z, main = "ACF du bruit blanc")
acf(na.omit(y), main = "ACF du bruit blanc filtre")
```

# Simulation dans R

On peut vérifier qualitativement les calculs précédents.

```
set.seed(123)
z <- ts(rnorm(160), start = c(2000, 1), frequency = 12)
y <- z + 0.8*c(NA, z[-length(z)])

acf(z, main = "ACF du bruit blanc")
acf(na.omit(y), main = "ACF du bruit blanc filtre")
```

`c(NA, z[-length(z)])` fabrique le retard : à la date $t$, on place la valeur précédente. Le premier terme manque naturellement.

# Formule générale pour un bruit blanc filtré

Si

$$Y_t = \sum_j a_j Z_{t-j},$$

où $(Z_t)$ est un bruit blanc centré de variance $\sigma^2$, alors

# Formule générale pour un bruit blanc filtré

Si

$$Y_t = \sum_j a_j Z_{t-j},$$

où $(Z_t)$ est un bruit blanc centré de variance $\sigma^2$, alors

$$\gamma_Y(h) = \sigma^2 \sum_j a_j a_{j+h}.$$

# Formule générale pour un bruit blanc filtré

Si

$$Y_t = \sum_j a_j Z_{t-j},$$

où $(Z_t)$ est un bruit blanc centré de variance $\sigma^2$, alors

$$\gamma_Y(h) = \sigma^2 \sum_j a_j a_{j+h}.$$

Les seules contributions viennent des chocs qui apparaissent à la fois dans $Y_t$ et dans $Y_{t+h}$.

# Formule générale pour un bruit blanc filtré

Si

$$Y_t = \sum_j a_j Z_{t-j},$$

où $(Z_t)$ est un bruit blanc centré de variance $\sigma^2$, alors

$$\gamma_Y(h) = \sigma^2 \sum_j a_j a_{j+h}.$$

Les seules contributions viennent des chocs qui apparaissent à la fois dans $Y_t$ et dans $Y_{t+h}$.

Autocovariance d'un bruit blanc filtré = recouvrement des coefficients du filtre avec eux-mêmes décalés de $h$.

# Filtres infinis

Certains modèles gardent une mémoire de tous les chocs passés, mais avec une influence décroissante.

# Pourquoi des filtres infinis ?

Un filtre fini oublie complètement le passé au-delà d'un certain retard.

# Pourquoi des filtres infinis ?

Un filtre fini oublie complètement le passé au-delà d'un certain retard.

Exemple fini :

$$Y_t = Z_t + 0.8Z_{t-1}.$$

Seuls les chocs $Z_t$ et $Z_{t-1}$ interviennent.

# Pourquoi des filtres infinis ?

Un filtre fini oublie complètement le passé au-delà d'un certain retard.

Exemple fini :

$$Y_t = Z_t + 0.8 Z_{t-1}.$$

Seuls les chocs $Z_t$ et $Z_{t-1}$ interviennent.

Exemple infini :

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \phi^3 Z_{t-3} + \cdots .$$

Tous les chocs passés interviennent, mais avec des poids décroissants si $|\phi| < 1$.

# Condition de convergence : l'idée

Une somme infinie de variables aléatoires doit être contrôlée.

# Condition de convergence : l'idée

Une somme infinie de variables aléatoires doit être contrôlée.

Pour un filtre géométrique causal, les poids sont

$$\psi_j = \phi^j, \qquad j \geq 0.$$

Si $|\phi| < 1$, alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j = \frac{1}{1 - |\phi|} < \infty.$$

# Condition de convergence : l'idée

Une somme infinie de variables aléatoires doit être contrôlée.

Pour un filtre géométrique causal, les poids sont

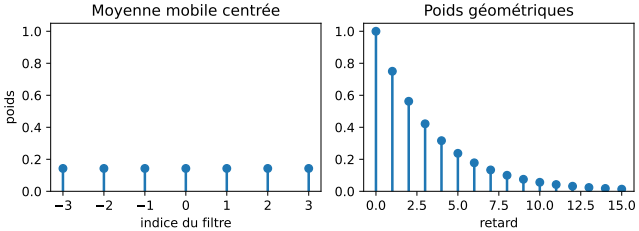
$$\psi_j = \phi^j, \qquad j \geq 0.$$

Si $|\phi| < 1$, alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j = \frac{1}{1 - |\phi|} < \infty.$$

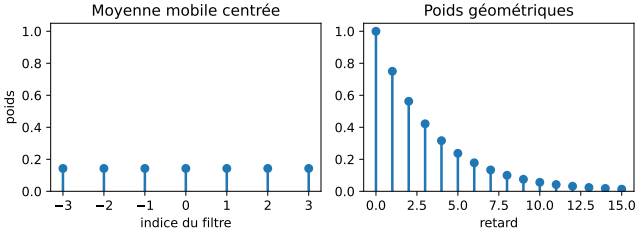
La condition $|\phi| < 1$ garantit que les poids anciens deviennent suffisamment petits pour que la somme ait un sens.

# Poids finis et poids géométriques




Un filtre fini a une mémoire bornée : après un certain retard, le poids est exactement nul.

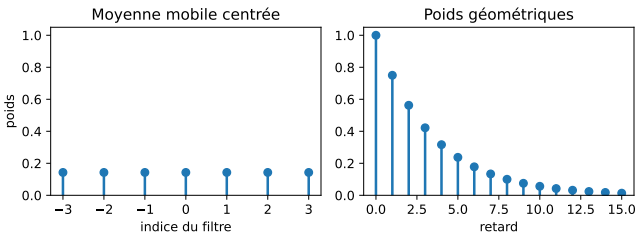
# Poids finis et poids géométriques




Un filtre fini a une mémoire bornée : après un certain retard, le poids est exactement nul.

Un filtre géométrique a une mémoire infinie mais décroissante.

# Poids finis et poids géométriques




Un filtre fini a une mémoire bornée : après un certain retard, le poids est exactement nul.

Un filtre géométrique a une mémoire infinie mais décroissante.

Les vieux chocs comptent encore, mais de moins en moins.

# Poids géométriques dans R

On affiche les premiers poids pour $\phi = 0.7$.

```
phi <- 0.7
poids <- phi^(0:11)
poids
```

# Poids géométriques dans R

On affiche les premiers poids pour $\phi = 0.7$.

```
phi <- 0.7
poids <- phi^(0:11)
poids
```

Les premiers poids sont

$$1,\ 0.7,\ 0.49,\ 0.343,\ 0.2401, \ldots$$

# Poids géométriques dans R

On affiche les premiers poids pour $\phi = 0.7$.

```
phi <- 0.7
poids <- phi^(0:11)
poids
```

Les premiers poids sont

$$1,\ 0.7,\ 0.49,\ 0.343,\ 0.2401, \ldots$$

Après 12 retards, l'influence vaut $0.7^{11} \simeq 0.02$ : elle n'est pas nulle, mais elle est devenue faible.

# Lien avec les modèles autorégressifs

Le filtre géométrique servira de pont vers les modèles AR.

# Lien avec les modèles autorégressifs

Le filtre géométrique servira de pont vers les modèles AR.

Si

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \cdots,$$

alors formellement

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t.$$

# Lien avec les modèles autorégressifs

Le filtre géométrique servira de pont vers les modèles AR.

Si

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \cdots,$$

alors formellement

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t.$$

Le présent peut donc s'écrire comme une partie du passé plus un nouveau choc :

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t.$$

# Lien avec les modèles autorégressifs

Le filtre géométrique servira de pont vers les modèles AR.

Si

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \cdots,$$

alors formellement

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t.$$

Le présent peut donc s'écrire comme une partie du passé plus un nouveau choc :

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t.$$

Cette idée sera reprise dans le chapitre suivant avec les modèles AR, MA et ARMA.

# Synthèse de la séance

Après cette séance, il faut savoir :

1. écrire une différence ou une moyenne mobile comme un polynôme en $B$ ;
2. décider si un filtre est causal ou s'il utilise une valeur future ;
3. calculer l'effet d'un filtre sur une constante, une tendance ou une saisonnalité ;
4. composer deux filtres et comprendre le télescopage ;
5. calculer l'autocovariance de $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ ;
6. interpréter des poids géométriques et leur décroissance.

# Synthèse de la séance

Après cette séance, il faut savoir :

1. écrire une différence ou une moyenne mobile comme un polynôme en $B$ ;
2. décider si un filtre est causal ou s'il utilise une valeur future ;
3. calculer l'effet d'un filtre sur une constante, une tendance ou une saisonnalité ;
4. composer deux filtres et comprendre le télescopage ;
5. calculer l'autocovariance de $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ ;
6. interpréter des poids géométriques et leur décroissance.

Ces points sont à retenir avant de passer aux exercices : ils seront utilisés à la fois dans les calculs et dans les manipulations sous R.

# Trois questions à garder en tête

Trois questions simples doivent accompagner chaque filtre.

# Trois questions à garder en tête

Trois questions simples doivent accompagner chaque filtre.

**1. Quelles dates utilise-t-il ?**
Présent seulement, passé, futur, même saison précédente ?

# Trois questions à garder en tête

Trois questions simples doivent accompagner chaque filtre.

**1. Quelles dates utilise-t-il ?**
Présent seulement, passé, futur, même saison précédente ?

**2. Quels sont ses coefficients ?**
Somment-ils à 1, à 0, ou à autre chose ?

# Trois questions à garder en tête

Trois questions simples doivent accompagner chaque filtre.

**1. Quelles dates utilise-t-il ?**
Présent seulement, passé, futur, même saison précédente ?

**2. Quels sont ses coefficients ?**
Somment-ils à 1, à 0, ou à autre chose ?

**3. Quelle est son intention ?**
Lisser, comparer, enlever une saisonnalité, ou créer un modèle de dépendance ?