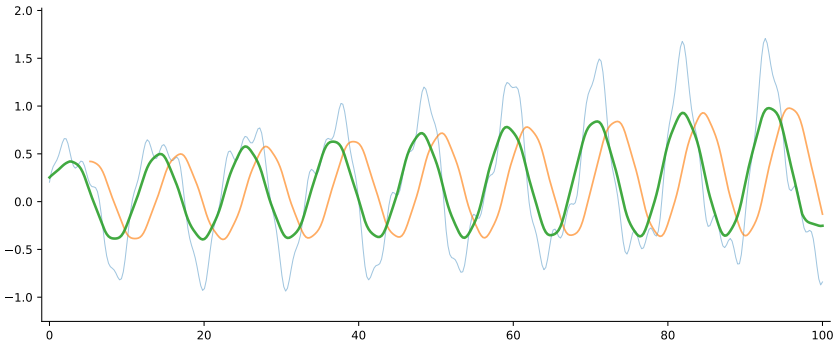
Séries temporelles

Cours 5 – Séries non stationnaires et modèles ARIMA/SARIMA



M1 Actuariat – Université Gustave Eiffel

Solesne Bourguin – 2026–2027

Fil conducteur de la séance

On a construit des modèles ARMA pour des séries déjà stationnaires. Aujourd'hui, on explique comment traiter les séries dont le niveau ou la saisonnalité empêche cette stationnarité.

1. Revenir sur la limite des modèles ARMA stationnaires.
2. Distinguer tendance déterministe et tendance stochastique.
3. Comprendre pourquoi une racine unitaire conduit à différencier.
4. Définir les modèles ARIMA : ARMA après différenciation.
5. Ajouter la différence saisonnière et arriver aux modèles SARIMA.

Idée à retenir. Un ARMA modélise une série stationnaire. Un ARIMA modélise une série qui devient stationnaire après une ou plusieurs différences.

Rappel 1/3 : ce que suppose un modèle ARMA

Un modèle ARMA est conçu pour décrire la dépendance d'une série qui fluctue autour d'un comportement stable.

Hypothèse de travail

On suppose que la série $X = (X_t)$ est stationnaire du second ordre :

$$\mathbb{E}(X_t) = m, \qquad \gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) \text{ ne dépend que de } h.$$

Ce que l'ARMA sait faire

- mémoire courte ou persistante ;
- ACF et PACF interprétables ;
- prévision autour d'un niveau stable.

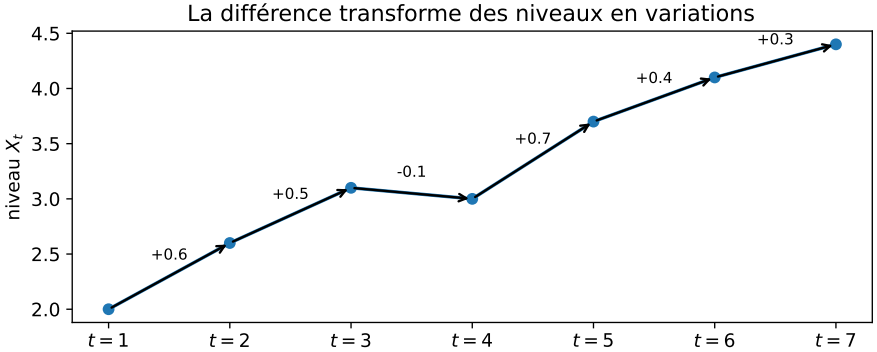
Ce qu'il ne doit pas porter seul

- tendance durable ;
- saisonnalité non retirée ;
- changements de niveau permanents.

Rappel 2/3 : la différence première

L'opérateur retard est noté B : $BX_t = X_{t-1}$. La différence première est le filtre

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t.$$

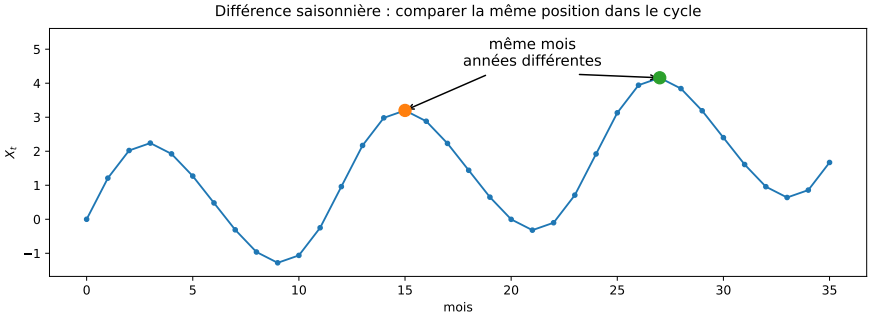


Idée à retenir. Différencier revient à passer des niveaux aux variations. C'est souvent dans les variations que la série devient plus stable.

Rappel 3/3 : différence saisonnière

Si la période saisonnière est s, la différence saisonnière est

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s} = (1 - B^s) X_t.$$



Pour des données mensuelles, $s = 12$; pour des données trimestrielles, $s = 4$.

Première partie

Pourquoi quitter les ARMA stationnaires ?

Après les transformations, il reste souvent une série non stationnaire qu'un ARMA ne peut pas absorber tel quel.

La situation visée

On ne modélise pas directement une série brute qui possède encore une tendance forte ou une saisonnalité évidente.

Étape	Question	Outils
Préparer la série	tendance ? saisonnalité ? échelle ?	log, différences
Modéliser le reste	dépendance temporelle ? mémoire ?	ARMA
Diagnostiquer	le modèle suffit-il ?	résidus, ACF, tests

Idée à retenir. On garde les modèles ARMA, mais on les applique au bon objet : une série transformée que l'on juge à peu près stationnaire.

Exemple : niveau ou variation ?

Considérons une série économique mensuelle X_t : chiffre d'affaires, nombre de passagers, prix, indice financier.

Niveau X_t

- peut croître durablement ;
- peut garder une saisonnalité forte ;
- peut avoir une ACF artificiellement très élevée.

Variation ΔX_t

- mesure le changement d'une période à l'autre ;
- retire certaines tendances ;
- peut être modélisée par un ARMA.

Point de vigilance. Une forte autocorrélation dans une série brute peut venir d'une tendance, pas d'une mémoire ARMA pertinente.

Deuxième partie

Deux formes de non-stationnarité

Tendance déterministe et tendance stochastique ne racontent pas la même histoire.

Tendance déterministe

Un modèle simple de tendance déterministe est

$$X_t = a + bt + Z_t,$$

où $Z = (Z_t)$ est une série stationnaire centrée.

Interprétation
La partie non stationnaire est la droite $t \mapsto a + bt$. Le bruit Z_t fluctue autour de cette trajectoire.

Méthode naturelle
On estime la tendance par régression, puis on étudie les résidus.

Idée à retenir. Ici, les chocs ne déplacent pas durablement le niveau moyen : ils sont des fluctuations autour d'une courbe déterministe.

Tendance stochastique

L'exemple fondamental est la marche aléatoire :

$$X_t = X_{t-1} + Z_t, \qquad \text{donc} \qquad (1 - B)X_t = Z_t.$$

Ce que cela signifie
Le niveau est construit par accumulation :

$$X_t = X_0 + Z_1 + \cdots + Z_t.$$

Un choc Z_t reste donc présent dans tous les niveaux futurs.

Le polynôme autorégressif est

$$\Phi(z) = 1 - z.$$

Il s'annule en $z = 1$: on dit qu'il y a une racine unitaire.
C'est le marqueur algébrique d'un choc qui ne s'efface pas.

Idée à retenir. La non-stationnarité vient ici de l'accumulation des chocs, pas d'une droite fixe à retirer.

Accumulation des chocs : le cas limite de l'AR(1)

Pour un AR(1),

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t.$$

Un choc reçu à la date t contribue encore à X_{t+h} avec un coefficient ϕ^h.

Si $|\phi| < 1$

$$\phi^h \longrightarrow 0.$$

L'effet du choc diminue avec l'horizon.

La série peut revenir vers un niveau stable.

Si $\phi = 1$

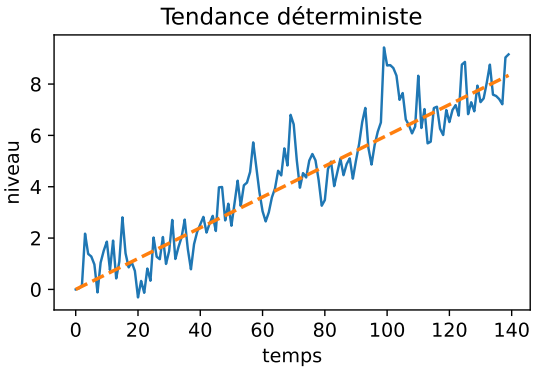
$$\phi^h = 1 \quad \text{pour tout } h.$$

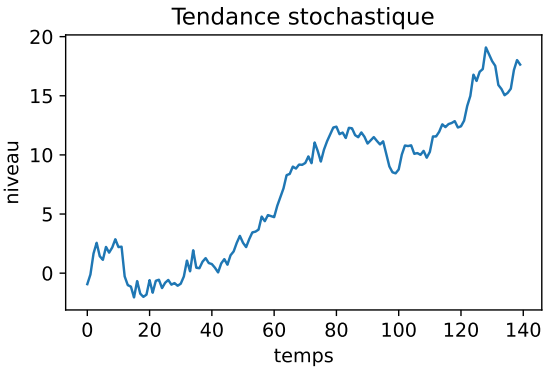
L'effet du choc ne diminue jamais.

C'est la marche aléatoire : les chocs s'accumulent.

Idée à retenir. La racine unitaire correspond au cas $\phi = 1$: la mémoire des chocs ne décroît plus. Différencier retire ce mécanisme.

Deux séries qui peuvent se ressembler





Point de vigilance. Sur un intervalle fini, une tendance déterministe et une tendance stochastique peuvent donner des graphiques proches. Mais elles impliquent des prévisions très différentes.

Comparaison conceptuelle

	Tendance déterministe	Tendance stochastique
Forme simple	$X_t = a + bt + Z_t$	$X_t = X_{t-1} + Z_t$
Mécanisme	moyenne qui suit une courbe fixe	niveau qui cumule les chocs
Effet d'un choc	temporaire	durable
Signe algébrique	pas de facteur $(1 - B)$ à retirer	facteur $(1 - B)$, racine en 1
Traitement naturel	estimer puis retirer la tendance	appliquer $\Delta = (1 - B)$
Question à vérifier	les résidus sont-ils stables ?	ΔX_t est-elle stable ?

Idée à retenir. La racine unitaire est le marqueur de la tendance stochastique : elle dit que les chocs restent dans le niveau. Différencier sert à retirer ce mécanisme avant d'ajuster un ARMA.

Conséquence : la marche aléatoire n'est pas stationnaire

Supposons

$$X_t = X_0 + Z_1 + \cdots + Z_t,$$

où les Z_i sont centrés, non corrélés, de variance σ^2.
Alors

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0), \qquad \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(X_0) + t\sigma^2.$$

Conclusion
La variance dépend de t. Donc la marche aléatoire n'est pas stationnaire du second ordre.

Point de vigilance. Même si la moyenne est constante, la variance augmente avec l'horizon : le niveau n'a pas une dispersion stable.

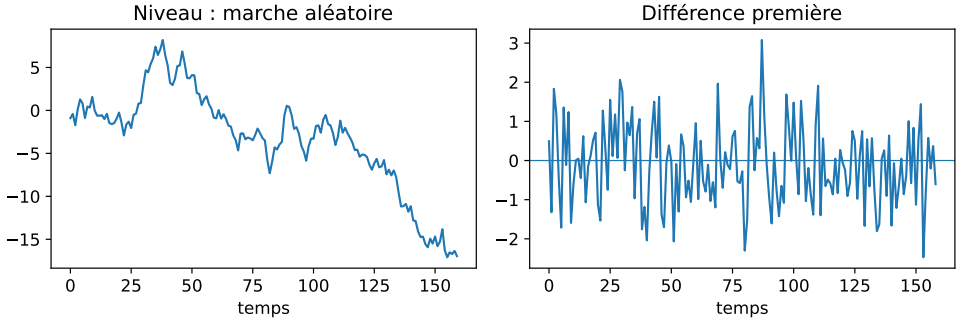
Retirer la racine unitaire : différencier

Si

$$X_t = X_{t-1} + Z_t,$$

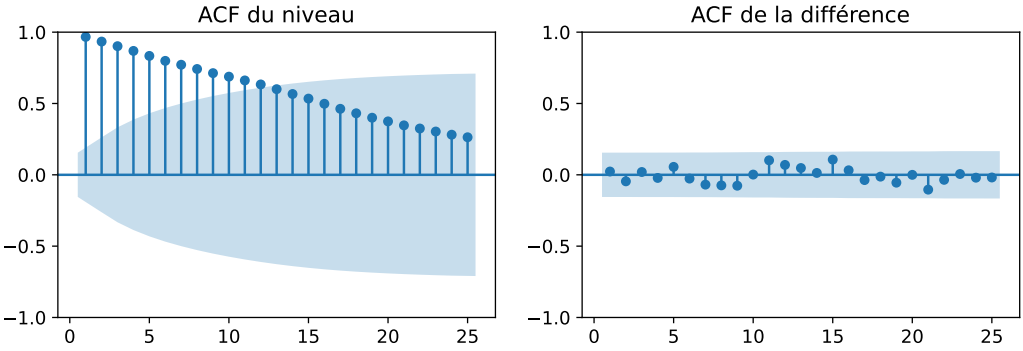
alors

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = Z_t.$$



Idée à retenir. La différence $\Delta = (1 - B)$ retire le facteur responsable : le niveau est non stationnaire, mais sa différence est un bruit blanc.

Indice pratique : ACF avant et après différence



Lecture pratique
Une ACF du niveau qui décroît très lentement peut signaler une racine unitaire. Après différence, on vérifie si l'ACF devient compatible avec une mémoire courte.

Troisième partie

Séries intégrées et modèles ARIMA

L'idée centrale est simple : modéliser par ARMA une série préalablement différenciée.

Série intégrée d'ordre d

Définition. On dit que X est intégrée d'ordre d, et on note souvent $X \sim I(d)$, si $\Delta^d X$ est stationnaire, alors que $\Delta^{d-1} X$ ne l'est pas. Autrement dit, on retire d racines unitaires ordinaires.

Ici,

$$\Delta^d = (1 - B)^d.$$

Notation	Signification	Exemple
$I(0)$	déjà stationnaire	ARMA stationnaire
$I(1)$	stationnaire après une différence	une racine unitaire
$I(2)$	stationnaire après deux différences	tendance encore plus persistante

Pourquoi parle-t-on d'« intégré » ?

Si $\Delta X_t = Y_t$, alors

$$X_t = X_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t.$$

Autrement dit, le niveau X_t est une somme cumulée des variations Y_t.

Différencier
On passe du niveau aux variations :

$$X_t \longmapsto \Delta X_t.$$

Intégrer
On reconstruit le niveau en cumulant :

$$\Delta X_t \longmapsto X_t.$$

Idée à retenir. Un ARIMA est un ARMA que l'on a ensuite « réintégré » pour revenir au niveau de la série.

Définition d'un ARIMA(p, d, q)

Définition. On dit que X suit un modèle ARIMA(p, d, q) si la série différenciée

$$Y_t = \Delta^d X_t$$

suit un modèle ARMA(p, q) stationnaire.

Avec les polynômes

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p, \qquad \Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q,$$

on écrit

$$\Phi(B)(1 - B)^d X_t = \Theta(B) Z_t.$$

Le facteur $(1 - B)^d$ retire les racines unitaires ordinaires avant l'ARMA.

Lire les trois paramètres p, d, q

Paramètre	Nom	Rôle
p	ordre AR	nombre de retards de la série différenciée utilisés dans la partie autorégressive
d	ordre d'intégration	nombre de facteurs $(1 - B)$ retirés par différence ordinaire
q	ordre MA	nombre de retards des innovations utilisés dans la partie moyenne mobile

Idée à retenir. La notation ARIMA(p, d, q) ne dit pas seulement « quel ARMA ». Elle dit aussi combien de fois il a fallu différencier avant de modéliser.

Exemple 1 : ARIMA$(0,1,0)$

ARIMA$(0,1,0)$ signifie que

$$\Delta X_t = Z_t.$$

Donc

$$X_t = X_{t-1} + Z_t.$$

C'est la marche aléatoire.

Sur les variations
Aucun AR, aucun MA : les variations sont du bruit blanc.

Sur le niveau
Il reste une racine unitaire : les chocs s'accumulent et le niveau n'est pas stationnaire.

Exemple 2 : ARIMA$(0,1,0)$ avec dérive

On autorise les variations à avoir une moyenne non nulle :

$$\Delta X_t = c + Z_t.$$

Alors

$$X_t = X_{t-1} + c + Z_t.$$

Interprétation
Le niveau suit une marche aléatoire avec une dérive moyenne c par période. Mais les chocs continuent de s'accumuler.

Point de vigilance. Une dérive n'est pas la même chose qu'une tendance déterministe fixe. Dans la marche aléatoire avec dérive, les écarts créés par les chocs ne sont pas rappelés vers une droite.

Exemple 3 : ARIMA$(1,1,0)$

ARIMA$(1,1,0)$ signifie que la série des variations suit un AR(1) :

$$(1-\phi B)\Delta X_t = Z_t.$$

Autrement dit,

$$\Delta X_t = \phi \Delta X_{t-1} + Z_t.$$

Lecture
Le niveau X_t n'est pas stationnaire, mais ses variations ont une mémoire de type AR(1).

Idée à retenir. Les modèles ARIMA séparent deux questions : faut-il différencier ? puis quel modèle ARMA pour la série différenciée ?

Prévision d'une marche aléatoire avec dérive

Soit

$$X_t = X_{t-1} + c + Z_t,$$

où Z est un bruit blanc centré de variance σ^2.
En itérant,

$$X_{n+h} = X_n + hc + Z_{n+1} + \cdots + Z_{n+h}.$$

Donc, conditionnellement à l'information disponible au temps n,

$$\mathbb{E}(X_{n+h} \mid \mathcal{F}_n) = X_n + hc, \qquad \mathrm{Var}(X_{n+h} - \mathbb{E}(X_{n+h} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_n) = h\sigma^2.$$

Interprétation de la prévision

Sans dérive : $c = 0$
La meilleure prévision du niveau futur est le dernier niveau observé :

$$\mathbb{E}(X_{n+h} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

Avec dérive : $c \neq 0$
La prévision avance à vitesse moyenne c :

$$\mathbb{E}(X_{n+h} \mid \mathcal{F}_n) = X_n + hc.$$

Idée à retenir. L'incertitude augmente avec l'horizon : à horizon h, on additionne h innovations futures inconnues.

Choisir d : l'idée pratique

Le paramètre d doit être assez grand pour retirer les racines unitaires visibles, mais pas plus.

Situation	Transformation candidate	À vérifier ensuite
Tendance lente dans le niveau	ΔX_t	série plus stable ? ACF moins persistante ?
Série de prix ou indice	rendements ou différences de log	dépendance restante ?
Série déjà stable	pas de différence	éviter de créer une fausse dépendance

Point de vigilance. Différencier est une opération forte : elle change la question statistique, car on ne modélise plus le niveau mais ses variations.

Sur-différencier : le problème

Sur-différencier signifie appliquer une différence alors que la série était déjà stationnaire.

Exemple
Si $X_t = Z_t$ est un bruit blanc, alors

$$\Delta X_t = Z_t - Z_{t-1}.$$

Ce n'est plus un bruit blanc : deux différences successives partagent une innovation commune avec un signe opposé.

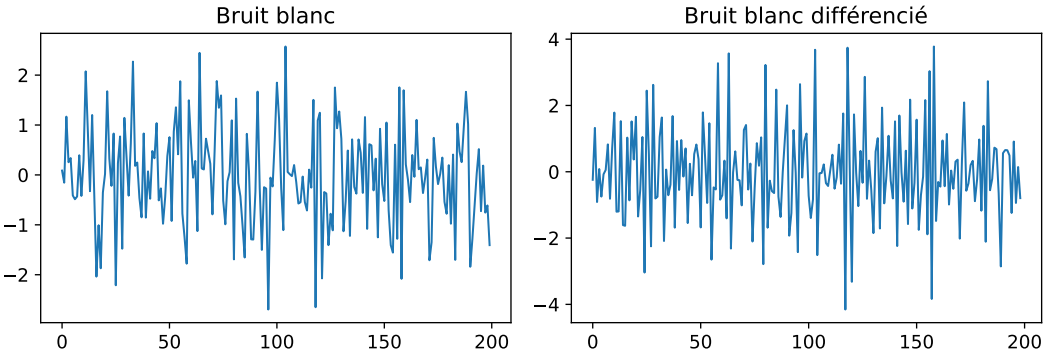
En effet,

$$\mathrm{Cov}(\Delta X_t, \Delta X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(Z_t - Z_{t-1}, Z_{t-1} - Z_{t-2}) = -\sigma^2.$$

Et

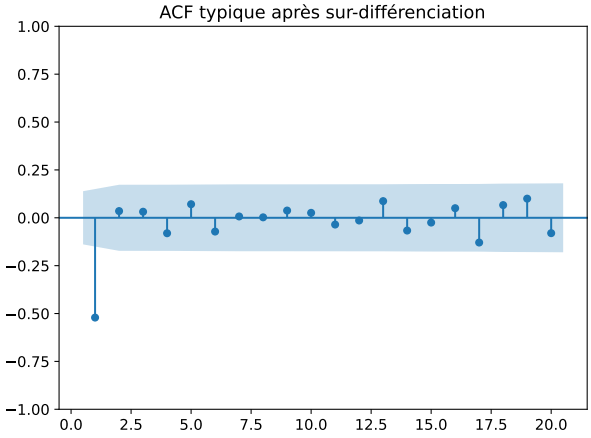
$$\mathrm{Var}(\Delta X_t) = 2\sigma^2, \qquad \rho(1) = -\frac{1}{2}.$$

Sur-différenciation : signature visuelle



Idée à retenir. La différence peut transformer une série déjà simple en une série plus bruitée et plus difficile à interpréter.

Sur-différenciation : signature dans l'ACF



Point de vigilance. Un fort pic négatif au retard 1 après différenciation peut signaler une sur-différenciation. Ce n'est pas une preuve automatique, mais un indice à examiner.

Commandes R : différence et graphiques

```
x <- AirPassengers
lx <- log(x)

# difference ordinaire : X_t - X_{t-1}
d1 <- diff(lx, differences = 1)

# difference saisonniere : X_t - X_{t-12}
ds <- diff(lx, lag = 12)

# difference ordinaire apres difference saisonniere
z <- diff(ds, differences = 1)

plot.ts(z)
acf(z)
pacf(z)
```

Décodage

`lag = 12` indique l'écart temporel utilisé dans la soustraction ; `differences = 1` indique combien de fois on applique cette différence.

Quatrième partie

Différenciation saisonnière et SARIMA

Quand la dépendance se répète de saison en saison, il faut souvent différencier à l'échelle de cette période.

Pourquoi une différence saisonnière ?

Une série mensuelle ne dépend pas seulement du mois précédent. Elle dépend souvent fortement du même mois l'année précédente.

Type de données	Période saisonnière s	Comparaison naturelle
mensuelles	12	janvier avec janvier précédent
trimestrielles	4	T1 avec T1 précédent
hebdomadaires avec cycle annuel	52	même semaine de l'année

$$\Delta_s X_t = (1 - B^s) X_t = X_t - X_{t-s}.$$

Idée à retenir. La différence saisonnière retire ce qui se répète à la même position du cycle.

Effet sur une saisonnalité déterministe

Supposons

$$X_t = m_t + s_t + Z_t, \qquad s_t = s_{t-s}.$$

Alors

$$\begin{aligned}(1 - B^s)X_t &= X_t - X_{t-s} \\ &= (m_t - m_{t-s}) + (s_t - s_{t-s}) + (Z_t - Z_{t-s}) \\ &= (m_t - m_{t-s}) + (Z_t - Z_{t-s}).\end{aligned}$$

Conclusion
La composante saisonnière déterministe disparaît exactement si elle se répète parfaitement avec période s.

Différence saisonnière : ce qu'elle fait et ne fait pas

Elle peut faire

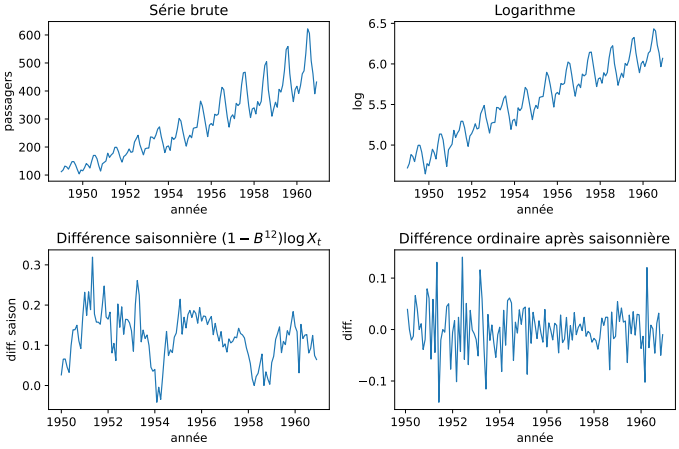
- réduire un motif annuel ;
- comparer des observations de même saison ;
- préparer une modélisation ARMA du reste.

Elle ne garantit pas

- la stationnarité complète ;
- la disparition d'une tendance ;
- l'absence de dépendance restante.

Point de vigilance. Après une différence saisonnière, il peut rester nécessaire d'appliquer une différence ordinaire.

Exemple : transformations de AirPassengers



Lire les transformations de AirPassengers

1. La série brute croît et l'amplitude des oscillations augmente avec le niveau.
2. Le logarithme rend les variations relatives plus comparables.
3. La différence saisonnière $(1 - B^{12}) \log X_t$ compare chaque mois au même mois de l'année précédente.
4. La différence ordinaire supplémentaire $(1 - B)(1 - B^{12}) \log X_t$ traite une persistance restante.

Point de vigilance. Ce choix ne vient pas seulement du graphique : après la différence saisonnière, on regarde aussi l'ACF et les diagnostics. Si les corrélations restent fortes aux petits retards et décroissent lentement, on ajoute une différence ordinaire.

Idée à retenir. On ne modélise pas directement X_t, mais une transformation proche de

$$(1 - B)(1 - B^{12}) \log X_t.$$

Définition d'un SARIMA

Un SARIMA ajoute une partie saisonnière au modèle ARIMA.

Définition. Un modèle SARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ s'écrit sous la forme

$$\Phi(B)\Phi_s(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \Theta(B)\Theta_s(B^s)Z_t.$$

- d : nombre de différences ordinaires ;
- D : nombre de différences saisonnières ;
- s : période saisonnière ;
- p, q : ordres ARMA non saisonniers ;
- P, Q : ordres ARMA saisonniers.

Lire la notation SARIMA

Pour une série mensuelle, un modèle

$$\text{SARIMA}(0,1,1) \times (0,1,1)_{12}$$

signifie :

$$(1-B)(1-B^{12})X_t = (1+\theta B)(1+\Theta B^{12})Z_t.$$

Lecture en mots
On applique une différence ordinaire et une différence saisonnière de période 12. Sur la série transformée, on ajuste une partie MA non saisonnière et une partie MA saisonnière.

Point de vigilance. Le 12 n'est pas un ordre de modèle. C'est la période saisonnière de la série.

Que signifient les facteurs saisonniers ?

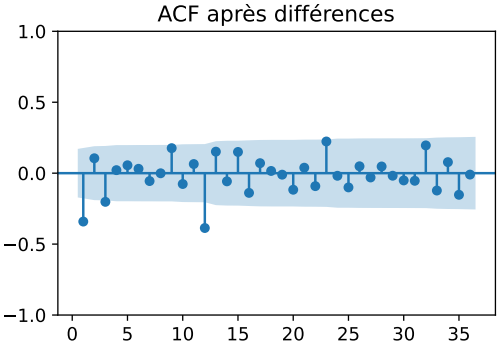
Le facteur $1 + \Theta B^{12}$ signifie que l'innovation d'il y a un an peut influencer la série transformée :

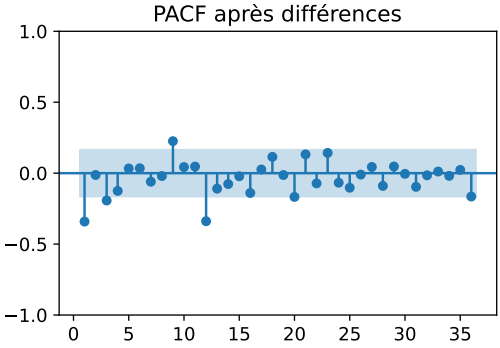
$$(1 + \Theta B^{12}) Z_t = Z_t + \Theta Z_{t-12}.$$

Plus généralement, les termes en B^s modélisent une dépendance à distance saisonnière.

Facteur	Retards concernés	Interprétation
$1 + \theta B$	1	mémoire courte d'une période
$1 + \Theta B^{12}$	12	mémoire d'une saison à l'autre
$1 - \Phi B^{12}$	12	propagation autorégressive annuelle

ACF et PACF après transformation





Lecture prudente
On cherche des indices sur les ordres p, q, P, Q. Mais ces graphiques sont bruités : ils guident l'identification, ils ne prouvent pas le modèle.

Commandes R : ajuster un SARIMA simple

L'estimation détaillée sera reprise au cours suivant. Pour situer la syntaxe R :

```
y <- log(AirPassengers)

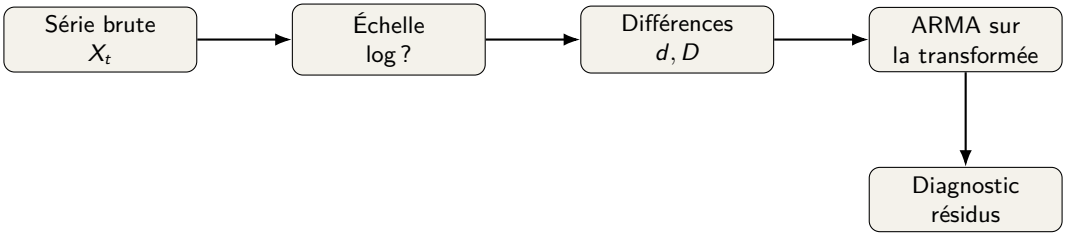
fit <- arima(y,
             order = c(0, 1, 1),
             seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period = 12))

fit
acf(residuals(fit))
```

Décodage

`order = c(p,d,q)` donne la partie ARIMA ordinaire. Dans `seasonal`, `order = c(P,D,Q)` donne la partie saisonnière et `period = 12` fixe la période.

Workflow pratique



Idée à retenir. Le cours 5 s'arrête surtout aux transformations et aux définitions. Le cours 6 traitera l'estimation, les critères AIC/BIC, les résidus et la prévision.

Cinquième partie

Ce qu'il faut savoir faire

Passer d'une série brute à une série modélisable, sans différencier trop ni trop peu.

Checklist d'identification

Avant d'ajuster un modèle, on peut poser les questions suivantes.

1. La série brute a-t-elle une tendance visible ?
2. L'amplitude semble-t-elle proportionnelle au niveau ? Si oui, essayer le logarithme.
3. Y a-t-il une saisonnalité ? Quelle est sa période s ?
4. Y a-t-il un indice de racine unitaire ? Une différence ordinaire est-elle nécessaire ?
5. La série transformée a-t-elle une ACF compatible avec une mémoire courte ?
6. Peut-on ensuite proposer des ordres ARMA raisonnables ?

Point de vigilance. On ne choisit pas d et D pour améliorer artificiellement l'ajustement. On les choisit pour obtenir un objet stationnaire interprétable.

Erreurs fréquentes

1. Ajuster un ARMA directement sur une série manifestement non stationnaire.
2. Confondre tendance déterministe et tendance stochastique.
3. Croire qu'une différence saisonnière suffit toujours.
4. Différencier trop de fois et créer une dépendance artificielle.
5. Lire l'ACF/PACF comme une preuve formelle au lieu d'un outil de diagnostic.

Idée à retenir. La qualité d'un modèle ARIMA dépend autant de la transformation initiale que du choix final des ordres p, q, P, Q.

Synthèse : ce qu'il faut retenir

1. Un modèle ARMA suppose une série stationnaire.
2. Une racine unitaire signifie que les chocs s'accumulent dans le niveau.
3. Une série intégrée $I(d)$ devient stationnaire après avoir retiré d facteurs $(1 - B)$.
4. Un ARIMA(p, d, q) est un ARMA(p, q) appliqué à $\Delta^d X_t$.
5. Une différence saisonnière compare X_t à X_{t-s}.
6. Un SARIMA$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ ajoute des différences et dépendances saisonnières.
7. Il faut éviter la sur-différenciation : différencier trop peut créer de la dépendance parasite.

Transition vers le cours 6

À la fin de cette séance, on sait transformer une série non stationnaire pour obtenir une série plus stable.

Prochaine étape
Une fois les ordres candidats choisis, il faut :

- estimer les paramètres ;
- comparer plusieurs modèles ;
- analyser les résidus ;
- produire et interpréter des prévisions.

Idée à retenir. Le cours 6 portera sur l'estimation, le diagnostic et la prévision des modèles ARIMA/SARIMA.