Séries temporelles – TD/TP 3

Filtres linéaires, convolution et bruit blanc filtré

M1 Actuariat – Université Gustave Eiffel

Durée indicative : 1h30

Objectifs

Cette séance accompagne le chapitre 3. À partir de maintenant, les TD/TP mélangent davantage calculs mathématiques et manipulations dans `R`. L'objectif est double : savoir appliquer les résultats du cours sur des exemples simples, puis vérifier numériquement ce que ces calculs prédisent.

Exercice 1 – Filtres finis : écriture et interprétation

Un filtre fini est une opération du type

$$Y_t = \sum_{k \in K} a_k X_{t-k},$$

où l'ensemble des indices utilisés est fini. On peut aussi l'écrire avec l'opérateur retard B.

1) Écrire sous la forme d'un polynôme en B les quatre filtres suivants :

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}, \qquad \Delta_{12} X_t = X_t - X_{t-12},$$

$$M_3^p X_t = \frac{1}{3}(X_t + X_{t-1} + X_{t-2}), \qquad M_3^c X_t = \frac{1}{3}(X_{t+1} + X_t + X_{t-1}).$$

2) Parmi ces filtres, lesquels sont causaux, c'est-à-dire calculables au temps t avec le présent et le passé seulement ? Lesquels utilisent une valeur future ?

3) Soit $X_t = a + bt$. Calculer ΔX_t, $M_3^p X_t$ et $M_3^c X_t$. Que fait la différence ordinaire à une tendance linéaire ? Que fait une moyenne mobile à une tendance linéaire ?

4) Soit s_t une suite de période 12 : $s_t = s_{t-12}$ pour tout t. Calculer $\Delta_{12} s_t$. Pourquoi cette opération est-elle utile pour une série mensuelle saisonnière ?

Idée à retenir

Un filtre n'est pas seulement une commande dans `R`. C'est une opération algébrique sur une série : moyenne, comparaison au passé, suppression d'une saisonnalité, etc. Les calculs ci-dessus sont typiquement le genre de questions qui peuvent apparaître dans un examen écrit.

Exercice 2 – Composition de filtres et convolution

Appliquer deux filtres successivement revient à appliquer un seul filtre dont les coefficients s'obtiennent par convolution. Dans cet exercice, on fait le calcul à la main.

1) On pose

$$M_2(B) = \frac{1}{2}(1 + B), \qquad \Delta(B) = 1 - B.$$

Calculer $M_2(B)\Delta(B)$, puis écrire le processus filtré $Y_t = M_2(B)\Delta(B)X_t$ en fonction de X_t, X_{t-1}, X_{t-2}.

2) On pose maintenant

$$M_3^p(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2).$$

Calculer $M_3^p(B)\Delta(B)$. Quel effet de télescopage observe-t-on ?

3) Les deux filtres $M_2(B)$ et $\Delta(B)$ commutent-ils ? Autrement dit, a-t-on

$$M_2(B)\Delta(B) = \Delta(B)M_2(B)?$$

Pourquoi est-ce attendu pour des polynômes en B ?

Exercice 3 – TP : moyenne mobile et différences sur une série simulée

On construit une série mensuelle artificielle. Elle contient une tendance lente, une oscillation annuelle et une fluctuation plus rapide.

```
n <- 180
t <- 1:n
x <- ts(0.025*t + sin(2*pi*t/12) + 0.35*sin(2*pi*t/3),
        start = c(2000, 1), frequency = 12)
```

Décodage du code R

- `n <- 180` fixe le nombre d'observations : 180 mois, donc 15 ans.
- `t <- 1:n` crée les indices temporels $1, 2, \ldots, n$.
- `0.025*t` crée une tendance linéaire lente.
- `sin(2*pi*t/12)` crée une oscillation de période 12, donc annuelle pour une série mensuelle.
- `ts(..., start = c(2000, 1), frequency = 12)` transforme le vecteur en série mensuelle commençant en janvier 2000.

1) Calculer et tracer une moyenne mobile passée et une moyenne mobile centrée sur 9 valeurs.

```
mm.passee <- stats::filter(x, filter = rep(1/9, 9), sides = 1)
mm.centree <- stats::filter(x, filter = rep(1/9, 9), sides = 2)

plot.ts(x, main = "Serie et moyennes mobiles", ylab = "valeur")
lines(mm.passee, lty = 2, lwd = 2)
lines(mm.centree, lty = 3, lwd = 2)
```

Décodage du code R

- `rep(1/9, 9)` construit les 9 poids du filtre, tous égaux à 1/9.
- `stats::filter(x, filter = ..., sides = 1)` applique une moyenne mobile passée.
- `sides = 2` demande une moyenne mobile centrée : on utilise des valeurs avant et après la date courante.
- `plot.ts(x, ...)` trace la série initiale, et `lines(...)` ajoute les séries filtrées.

2) Relier ce que vous observez au résultat de l'exercice 1 : pourquoi la moyenne mobile centrée est-elle plus symétrique, mais pas utilisable en temps réel ?

3) Calculer et tracer la différence ordinaire et la différence saisonnière.

```
dx <- diff(x)
d12x <- diff(x, lag = 12)

plot.ts(dx, main = "Difference ordinaire", ylab = "variation")
plot.ts(d12x, main = "Difference saisonniere", ylab = "variation annuelle")
```

Décodage du code R

- `diff(x)` calcule $x_t - x_{t-1}$, c'est-à-dire la variation d'une date à la suivante.
- `diff(x, lag = 12)` calcule $x_t - x_{t-12}$, c'est-à-dire la variation par rapport au même mois de l'année précédente.
- Les deux `plot.ts(...)` tracent séparément les séries transformées.

4) Quelle transformation enlève le mieux l'oscillation annuelle ? Expliquer en utilisant le calcul de l'exercice 1, pas seulement le graphique.

Exercice 4 – Bruit blanc filtré : calculs et simulation

Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2. On définit

$$Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

1) Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$.
2) Calculer $\gamma_Y(0) = \mathrm{Var}(Y_t)$.
3) Calculer $\gamma_Y(1) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1})$, puis $\gamma_Y(h)$ pour $|h| \geq 2$.
4) En déduire l'autocorrélation $\rho_Y(1)$ lorsque $\theta = 0.8$.
5) Vérifier qualitativement le résultat par simulation.

```
set.seed(123)
z <- ts(rnorm(160), start = c(2000, 1), frequency = 12)
y <- z + 0.8*c(NA, z[-length(z)])

plot.ts(z, main = "Bruit blanc simule", ylab = "z")
plot.ts(y, main = "Bruit blanc filtre", ylab = "y")
acf(z, main = "ACF du bruit blanc")
acf(na.omit(y), main = "ACF du bruit blanc filtre")
```

Décodage du code R

- `set.seed(123)` fixe la graine aléatoire pour obtenir tous la même simulation.
- `rnorm(160)` simule 160 variables gaussiennes centrées réduites.
- `c(NA, z[-length(z)])` décale la série : à la date t, on récupère la valeur précédente.
- `y <- z + 0.8*...` construit la série filtrée $y_t = z_t + 0.8 z_{t-1}$.
- `acf(...)` trace les autocorrélations empiriques.
- `na.omit(y)` enlève la première valeur manquante créée par le retard.

Exercice 5 – Filtre infini géométrique

On considère les poids $\psi_j = \phi^j$, pour $j \geq 0$, et $\psi_j = 0$ pour $j < 0$.

1) Montrer que si $|\phi| < 1$, alors $(\psi_j) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et calculer

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j.$$

2) Pourquoi cela permet-il d'appliquer le théorème général de filtrage du cours ?
3) Pour $\phi = 0.7$, afficher les 12 premiers poids.

```
phi <- 0.7
poids <- phi^(0:11)
poids
```

Décodage du code R

— `phi <- 0.7` fixe la valeur du paramètre ϕ.
— `0:11` crée les entiers de 0 à 11.
— `phi^(0:11)` calcule $1, \phi, \phi^2, \ldots, \phi^{11}$.

4) Les poids deviennent-ils rapidement négligeables ? Que cela signifie-t-il concrètement pour l'influence des chocs anciens ?