Correction – TD/TP 3

Filtres linéaires, convolution et bruit blanc filtré

M1 Actuariat – Université Gustave Eiffel

Exercice 1 – Filtres finis : écriture et interprétation

1) Les quatre filtres s'écrivent :

$$\Delta(B) = 1 - B, \qquad \Delta_{12}(B) = 1 - B^{12},$$

$$M_3^p(B) = \frac{1}{3}(1 + B + B^2), \qquad M_3^c(B) = \frac{1}{3}(B^{-1} + 1 + B).$$

Le terme B^{-1} signifie que le filtre utilise X_{t+1}, donc une valeur future.

2) Les filtres Δ, Δ_{12} et M_3^p sont causaux : ils utilisent seulement X_t et des valeurs passées. Le filtre M_3^c n'est pas causal, car il utilise X_{t+1}.

3) Si $X_t = a + bt$, alors

$$\Delta X_t = (a + bt) - (a + b(t-1)) = b.$$

La différence ordinaire transforme donc une tendance linéaire en constante.

Pour la moyenne mobile passée,

$$\begin{aligned} M_3^p X_t &= \frac{1}{3}\left((a + bt) + (a + b(t-1)) + (a + b(t-2))\right) \\ &= a + b(t-1). \end{aligned}$$

Elle conserve une tendance linéaire, mais la décale d'une période vers le passé.

Pour la moyenne mobile centrée,

$$\begin{aligned} M_3^c X_t &= \frac{1}{3}\left((a + b(t+1)) + (a + bt) + (a + b(t-1))\right) \\ &= a + bt. \end{aligned}$$

Sur une tendance linéaire pure, la moyenne mobile centrée redonne exactement la valeur centrale.

4) Si $s_t = s_{t-12}$, alors

$$\Delta_{12} s_t = s_t - s_{t-12} = 0.$$

La différence saisonnière supprime donc une saisonnalité exactement périodique de période 12. Pour une série mensuelle, elle compare un mois au même mois de l'année précédente.

Idée à retenir

La différence ordinaire répond à la question : « que s'est-il passé depuis la date précédente ? » La différence saisonnière répond à la question : « que s'est-il passé depuis la même saison du cycle précédent ? »

Exercice 2 – Composition de filtres et convolution

1) On calcule
$$M_2(B)\Delta(B) = \frac{1}{2}(1+B)(1-B) = \frac{1}{2}(1-B^2).$$
Donc
$$Y_t = M_2(B)\Delta(B)X_t = \frac{1}{2}(X_t - X_{t-2}).$$
Le terme en X_{t-1} disparaît : c'est un premier exemple de télescopage.

2) On a
$$\begin{aligned} M_3^p(B)\Delta(B) &= \frac{1}{3}(1+B+B^2)(1-B) \\ &= \frac{1}{3}(1-B+B-B^2+B^2-B^3) \\ &= \frac{1}{3}(1-B^3). \end{aligned}$$
Ainsi,
$$M_3^p(B)\Delta(B)X_t = \frac{1}{3}(X_t - X_{t-3}).$$
Tous les termes intermédiaires se compensent.

3) Oui, ces deux filtres commutent :
$$M_2(B)\Delta(B) = \Delta(B)M_2(B).$$
C'est attendu car ce sont des polynômes en B, et les polynômes en un même opérateur commutent. En termes de coefficients, cela correspond à l'associativité et à la commutativité de la convolution discrète dans ce cas fini.

Exercice 3 – TP : moyenne mobile et différences sur une série simulée

Le code de préparation est :

```
n <- 180
t <- 1:n
x <- ts(0.025*t + sin(2*pi*t/12) + 0.35*sin(2*pi*t/3),
        start = c(2000, 1), frequency = 12)
```

1) Le code pour les moyennes mobiles est :

```
mm.passee <- stats::filter(x, filter = rep(1/9, 9), sides = 1)
mm.centree <- stats::filter(x, filter = rep(1/9, 9), sides = 2)

plot.ts(x, main = "Serie et moyennes mobiles", ylab = "valeur")
lines(mm.passee, lty = 2, lwd = 2)
lines(mm.centree, lty = 3, lwd = 2)
```

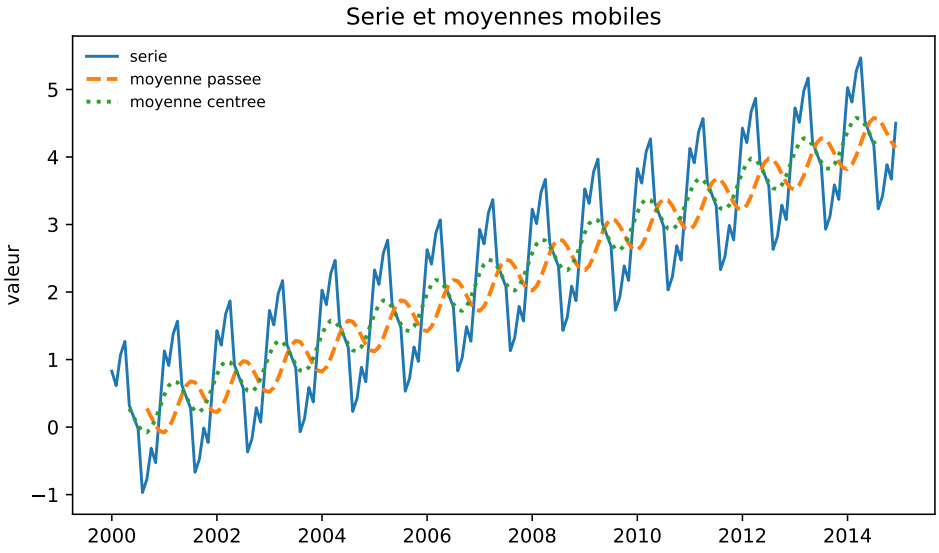


FIGURE 1 – Série simulée et moyennes mobiles sur 9 valeurs.

2) La moyenne mobile centrée est plus symétrique parce qu'elle utilise des valeurs avant et après la date courante. Elle est donc bien adaptée à une description rétrospective. En revanche, elle n'est pas utilisable en temps réel, car au temps t les valeurs futures ne sont pas encore connues.

3) Le code pour les différences est :

```
dx <- diff(x)
d12x <- diff(x, lag = 12)

plot.ts(dx, main = "Difference ordinaire", ylab = "variation")
plot.ts(d12x, main = "Difference saisonniere", ylab = "variation annuelle")
```

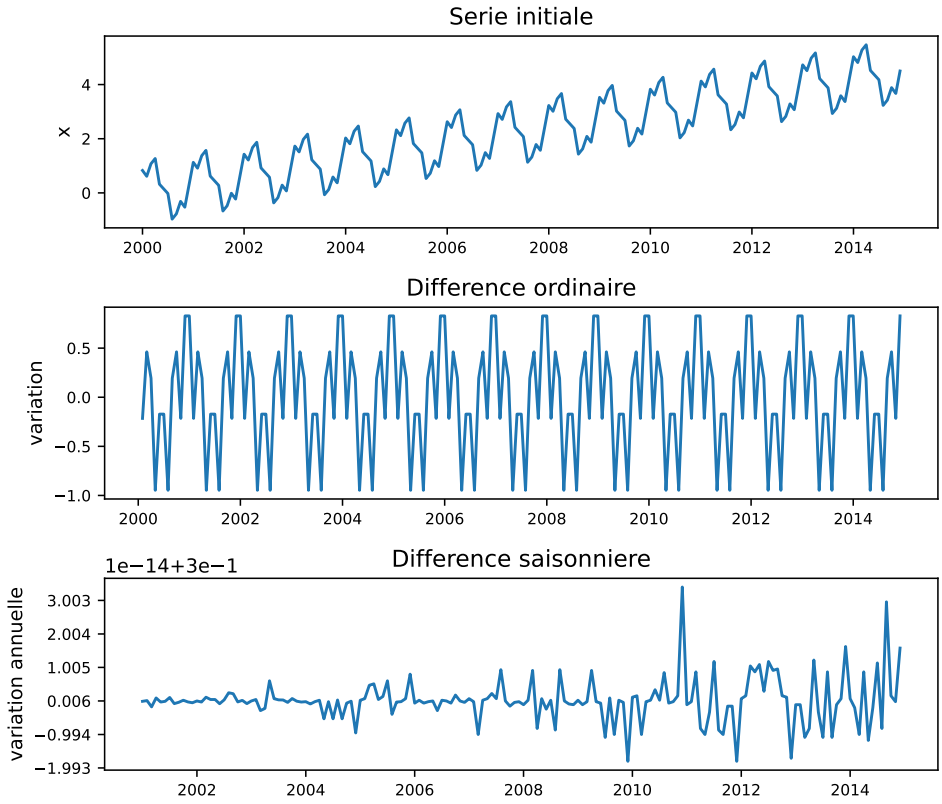


FIGURE 2 – Différence ordinaire et différence saisonnière.

4) La différence saisonnière enlève mieux l'oscillation annuelle. En effet, la composante $\sin(2\pi t/12)$ est de période 12, donc

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(t-12)}{12}\right) = 0.$$

Le graphique ne fait que confirmer ce calcul.

Exercice 4 – Bruit blanc filtré : calculs et simulation

On suppose que (Z_t) est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2, et que

$$Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

1) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Z_t) + \theta\mathbb{E}(Z_{t-1}) = 0.$$

2) Comme Z_t et Z_{t-1} sont non corrélées,

$$\gamma_Y(0) = \mathrm{Var}(Y_t) = \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 = (1+\theta^2)\sigma^2.$$

3) On calcule

$$\begin{aligned}\gamma_Y(1) &= \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+1}) \\ &= \mathrm{Cov}(Z_t + \theta Z_{t-1}, Z_{t+1} + \theta Z_t) \\ &= \theta\,\mathrm{Var}(Z_t) = \theta\sigma^2.\end{aligned}$$

Par symétrie, $\gamma_Y(-1) = \theta\sigma^2$. Pour $|h| \geq 2$, les deux variables Y_t et Y_{t+h} ne partagent aucun choc commun, donc

$$\gamma_Y(h) = 0.$$

4) L'autocorrélation au retard 1 vaut

$$\rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\theta}{1+\theta^2}.$$

Pour $\theta = 0.8$,

$$\rho_Y(1) = \frac{0.8}{1+0.8^2} = \frac{0.8}{1.64} \simeq 0.488.$$

On s'attend donc à voir une autocorrélation positive nette au retard 1.

5) Le code de simulation est :

```
set.seed(123)
z <- ts(rnorm(160), start = c(2000, 1), frequency = 12)
y <- z + 0.8*c(NA, z[-length(z)])

plot.ts(z, main = "Bruit blanc simule", ylab = "z")
plot.ts(y, main = "Bruit blanc filtre", ylab = "y")
acf(z, main = "ACF du bruit blanc")
acf(na.omit(y), main = "ACF du bruit blanc filtre")
```

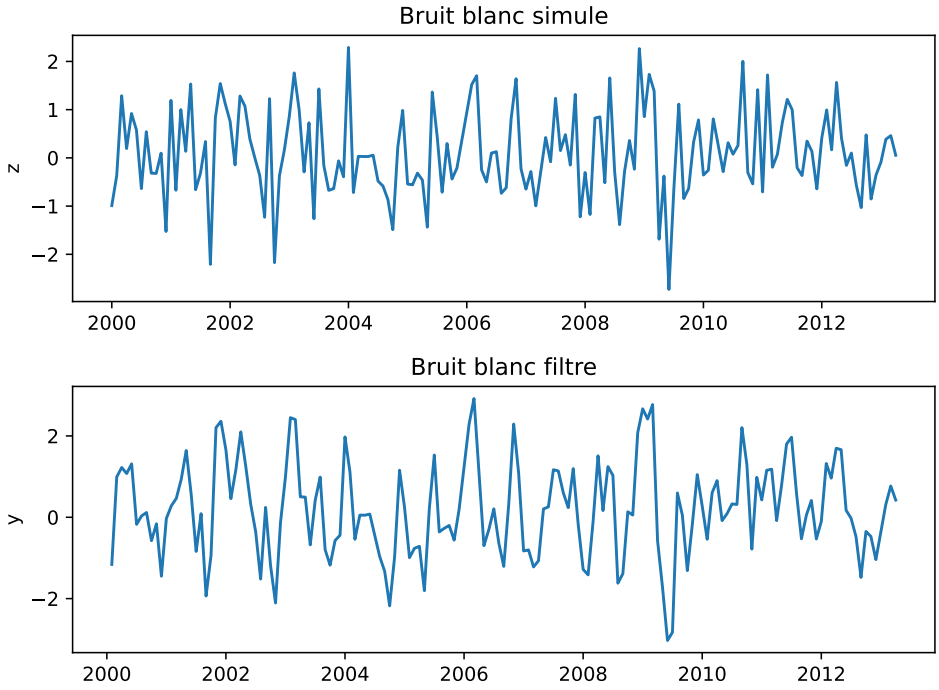


FIGURE 3 – Bruit blanc simulé et bruit blanc filtré par $1 + 0.8B$.

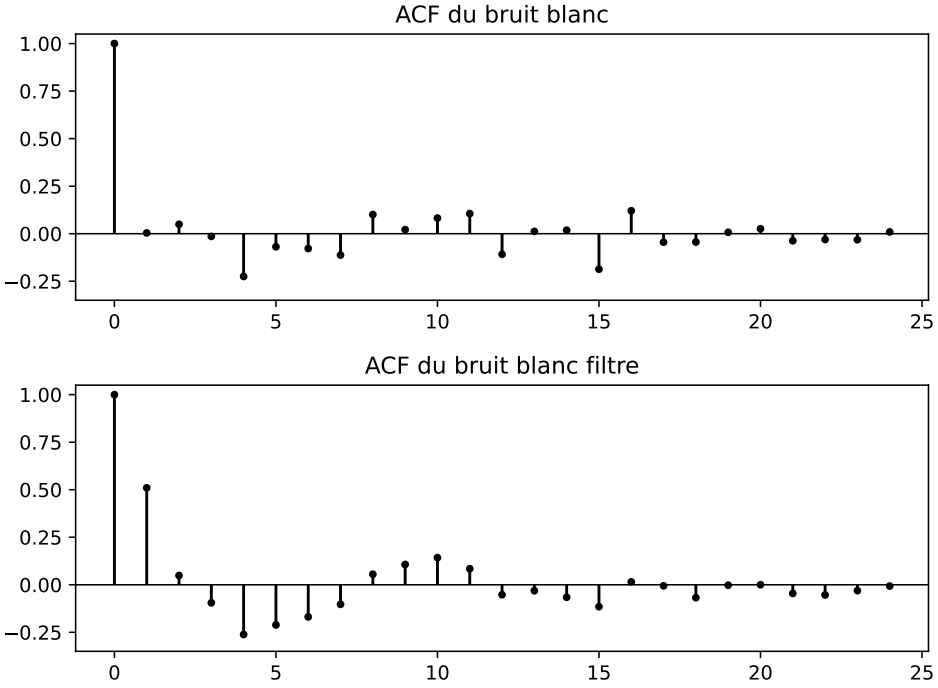


FIGURE 4 – Autocorrélations empiriques du bruit blanc et du bruit blanc filtré.

L'ACF empirique de y montre généralement une autocorrélation positive au retard 1, ce qui est cohérent avec le calcul théorique. Aux retards plus grands, les autocorrélations empiriques fluctuent autour de zéro parce que la simulation est finie.

Exercice 5 – Filtre infini géométrique

1) Si $|\phi| < 1$, alors
$$\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j = \frac{1}{1-|\phi|} < \infty.$$
Donc la suite (ψ_j) appartient à $\ell^1(\mathbb{Z})$.

2) Le théorème général de filtrage s'applique parce que les coefficients du filtre sont absolument sommables. Ainsi, pour tout processus stationnaire du second ordre X, la série
$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j X_{t-j}$$
est bien définie dans le cadre du théorème et définit encore un processus stationnaire.

3) Le code est :
```
phi <- 0.7
poids <- phi^(0:11)
poids
```
On obtient environ
$$1, 0.7, 0.49, 0.343, 0.2401, 0.1681, 0.1176, 0.0824, 0.0576, 0.0404, 0.0282, 0.0198.$$

4) Les poids deviennent assez vite petits. Concrètement, cela signifie que les observations ou chocs très anciens ont encore un effet, mais un effet de plus en plus faible. La condition $|\phi| < 1$ formalise l'idée d'une mémoire infinie mais décroissante.