Séries temporelles – TD/TP 4
Modèles MA, AR et ARMA stationnaires

M1 Actuariat – Université Gustave Eiffel

Durée indicative : 1h30

Objectifs

L'objectif est d'utiliser les propriétés des modèles MA, AR et ARMA pour résoudre des problèmes de représentation, de causalité, d'identification et d'interprétation. La dernière partie utilise des séries dont le modèle n'est pas indiqué à l'avance.

Exercice 1 – Une même dépendance, deux écritures MA(1)

Un analyste propose le modèle

$$X_t = Z_t + \frac{3}{2} Z_{t-1}, \qquad \mathrm{Var}(Z_t) = 1,$$

avec un bruit blanc centré. Un second analyste affirme que l'on peut obtenir exactement la même structure d'autocovariance avec un autre MA(1), cette fois inversible.

1) Calculer $\gamma_X(0)$, $\gamma_X(1)$ et $\rho_X(1)$.
2) On cherche une autre écriture

$$X_t = W_t + \eta W_{t-1}, \qquad \mathrm{Var}(W_t) = \tau^2,$$

ayant les mêmes autocovariances que le modèle précédent. Montrer que η doit vérifier

$$\frac{\eta}{1+\eta^2} = \rho_X(1).$$

Résoudre cette équation.

3) Parmi les deux solutions obtenues, laquelle correspond à l'écriture inversible ? Déterminer alors τ^2.
4) Expliquer en quelques lignes pourquoi cet exemple justifie l'introduction d'une convention d'inversibilité pour les modèles MA.

Idée à retenir

L'ACF ne suffit pas toujours à identifier une écriture MA de manière unique. L'inversibilité sert à choisir une représentation canonique parmi plusieurs représentations ayant la même structure de covariance.

Exercice 2 – Analyser la dynamique d'un AR(2)

On modélise une série centrée par

$$X_t = 1.1 X_{t-1} - 0.3 X_{t-2} + Z_t,$$

avec (Z_t) un bruit blanc de variance σ^2.

1) Écrire le polynôme autorégressif $\Phi(z)$, le factoriser et vérifier que le modèle est causal.
2) On veut comprendre concrètement comment un choc se propage. Supposons que $X_{-2} = X_{-1} = 0$, qu'un choc unique $Z_0 = 1$ se produise à la date 0, et que $Z_t = 0$ pour $t \geq 1$. Calculer $X_0, X_1, \ldots, X_5$. Commenter.
3) On écrit la représentation causale

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j Z_{t-j}.$$

Montrer, à partir de $\Phi(B)X_t = Z_t$, que

$$\psi_0 = 1, \qquad \psi_1 = 1.1, \qquad \psi_j = 1.1\psi_{j-1} - 0.3\psi_{j-2} \quad (j \geq 2).$$

Quel lien voyez-vous avec la question précédente ?
4) Utiliser la factorisation de Φ pour montrer que

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{-5}{1 - 0.5z} + \frac{6}{1 - 0.6z},$$

puis en déduire une expression explicite de ψ_j. Que devient l'effet d'un choc ancien lorsque $j \to \infty$?
5) Sans utiliser de formule toute faite pour l'AR(2), multiplier l'équation du modèle par X_{t-1}, puis prendre l'espérance, afin de montrer que

$$\rho(1) = \frac{1.1}{1.3}.$$

Montrer ensuite que, pour $h \geq 2$,

$$\rho(h) = 1.1\rho(h-1) - 0.3\rho(h-2).$$

Calculer $\rho(2)$, $\rho(3)$ et $\rho(4)$.
6) D'après ces résultats et le cours, quelle forme qualitative attendez-vous pour l'ACF ? Et pour la PACF ?

Exercice 3 – Remonter d'une dépendance observée vers un modèle

On dispose d'une série stationnaire centrée. Sur un échantillon assez long, on obtient approximativement

$$\widehat{\rho}(1) = 0.80, \qquad \widehat{\rho}(2) = 0.50,$$

et la PACF empirique présente deux pics nets aux retards 1 et 2, puis devient faible.
On décide donc d'examiner un modèle AR(2)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t.$$

1) En multipliant l'équation par X_{t-1}, puis par X_{t-2}, établir les deux relations

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1),$$
$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2.$$

2) Remplacer $\rho(1)$ et $\rho(2)$ par les valeurs empiriques données et résoudre le système pour obtenir des valeurs candidates de ϕ_1 et ϕ_2.
3) Vérifier si le modèle AR(2) ainsi obtenu est causal.
4) L'ACF empirique suffit-elle, à elle seule, à conclure définitivement que le modèle est un AR(2) ? Quel rôle joue ici la PACF ?

Exercice 4 – TP : identifier trois séries sans connaître leur modèle

Le fichier `td04_series.csv` contient trois séries stationnaires de longueur 320, notées `serie_A`, `serie_B` et `serie_C`. Chacune a été générée par l'un des modèles suivants :

$$\text{MA}(2), \qquad \text{AR}(2), \qquad \text{ARMA}(1,1),$$

mais on ne vous dit pas quelle série correspond à quel modèle.

1. Charger et regarder les données

```
d <- read.csv("td04_series.csv")
head(d)

a <- ts(d$serie_A)
b <- ts(d$serie_B)
c <- ts(d$serie_C)
```

Décodage du code R

`read.csv()` lit le fichier de données. Les trois colonnes sont ensuite transformées en objets de série temporelle avec `ts()`. Commencez par tracer les trois séries et par regarder si des différences qualitatives apparaissent, mais ne cherchez pas à identifier un modèle uniquement à partir du chronogramme.

1) Tracer les trois séries. Peut-on déjà distinguer clairement les trois familles de modèles ?

2) Pour chaque série, tracer l'ACF et la PACF jusqu'au retard 20. Ne regardez pas seulement les premières barres : décrivez la *forme générale* de chaque graphique.

```
acf(a, lag.max = 20)
pacf(a, lag.max = 20)
```

Faire de même pour `b` et `c`.

3) Compléter le tableau suivant en justifiant chaque choix.

Série	Forme de l'ACF	Forme de la PACF	Modèle candidat
A			
B			
C			

4) Pour la série que vous identifiez comme un AR(2), récupérer numériquement les deux premières autocorrélations empiriques :

```
r <- acf(b, lag.max = 2, plot = FALSE)$acf
r
```

Adaptez bien sûr la lettre `b` si vous avez identifié une autre série comme AR(2). Utiliser ensuite la méthode de l'exercice 3 pour obtenir des estimations simples de ϕ_1 et ϕ_2.

5) Vérifier la causalité du modèle estimé avec les racines de son polynôme autorégressif. La fonction suivante peut être utile :

```
polyroot(c(1, -phi1, -phi2))
```

Décodage du code R

Si le modèle est $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t$, alors $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$. La commande `polyroot(c(1,-phi1,-phi2))` calcule les racines de ce polynôme. La causalité exige que leurs modules soient strictement supérieurs à 1.

6) Pour la série identifiée comme MA(2), pourquoi les petites barres de l'ACF après le retard 2 ne doivent-elles pas vous faire rejeter automatiquement le modèle ?

7) Pour la série identifiée comme ARMA(1,1), expliquer pourquoi l'ACF et la PACF ne donnent pas ici une coupure nette permettant de lire directement p ou q.

Idée à retenir

L'identification par ACF/PACF est un raisonnement par signatures : une coupure nette suggère une famille, une décroissance progressive en suggère une autre. Sur des données finies, ces signatures sont bruitées et servent à proposer un modèle candidat, pas à produire une certitude automatique.